DS Trainer

Carlos Camino

www.carlos-camino.de/ds

Hallo!

Mit diesen Folien möchte ich eure Vorbereitung für die DS-Klausur etwas angenehmer machen. Ihr findet hier nicht nur die Definitionen und Sätze aus der Vorlesung, sondern vor allem Beispiele. Viele Beispiele!

Außerdem findet ihr mehr als 200 Quizfragen und -antworten, mit denen ihr euer Verständnis zu jedem Thema überprüfen könnt. Die Idee dieses Trainers ist die des *learning by doing*.

Konstruktive Kritik, Ideen und Kommentare sind jederzeit herzlichst willkommen.

Frohes Durchklicken!
Carlos

Disclaimer

Diese Folien wurden weder von Prof. Bungartz (Dozent) noch von der Übungsleitung erstellt und erheben keinerlei Anspruch auf Richtigkeit oder Vollständigkeit. Sie sollen nicht die Vorlesungsfolien ersetzen, sondern lediglich als Lernunterstützung dienen.

Ich werde mir Mühe geben, dass sie konsistent mit den Vorlesungsfolien sind. Bei Inkonsistenzen soll selbstverständlich den Vorlesungsfolien die Präferenz gegeben werden und nicht diesen.

Kleine Bitte

Ich mache gerne Fehler (besonders Sprachfehler) und übersehe ständig Sachen. Bitte traut euch, gefundene Fehler und Inkonsistenzen bei mir zu melden. Für jede Fehlermeldung (egal wie klein sie ist) werde ich sehr dankbar sein.

Meldungen über inhaltliche Fehler helfen euren Kommilitoninnen und Kommilitonen, um den Stoff besser zu verstehen. Meldungen über Grammatikfehler helfen mir, um die Sprache besser zu lernen.

Jedes Komma zählt!

Infos zur Struktur

- Die Abschnitte 2.1 bis 5.4 in diesem Trainer entsprechen genau den Foliensätzen 2 bis 21 aus der Vorlesung - in genau derselben Reihenfolge.
- Kapitel 6 enthält Folien, die in früheren Semestern Teil der DS-Vorlesung waren, aber dieses Semester völlig irrelevant sind.
- Die Struktur innerhalb eines Abschnittes, insbesondere die Aufteilung in Unterabschnitten (die, die mit drei Zahlen $x.y.z.$ nummeriert sind), habe ich selber gewählt.
- Bei jeder Themenübersicht sind alle aufgelisteten Themen und die Folienüberschrift anklickbar.

Themenübersicht

1. Einleitung
2. Grundlagen
3. Kombinatorik
4. Graphentheorie
5. Algebraische Strukturen

Nicht klausurrelevant

Themenübersicht

Was sind diskrete Strukturen?

Sie sind toll.

Themenübersicht

Themenübersicht

Themenübersicht

Mengen

Unter einer Menge verstehen wir jede Zusammenfassung von bestimmten wohl-unterschiedenen Objekten. Wichtig ist:

- Es werden geschweifte Klammern benutzt: $\{\ldots\}$.
- Elemente werden durch Kommas getrennt.
- Die Reihenfolge der Elemente ist irrelevant.
- Die Anzahl an Kopien desselben Elements ist irrelevant.
- Die Elemente einer Menge können beliebige Objekte sein, z.B. auch Mengen.

Beispiel

Die Menge $\{1, 2, 3\}$ enthält die Elemente 1, 2 und 3. Außerdem gilt beispielsweise:

$$\{1, 2, 3\} = \{2, 3, 1\} = \{1, 2, 3, 3, 3, 2\}.$$

Elementrelation

x ist Element von A (in Zeichen: $x \in A$), falls x in A enthalten ist. Falls x kein Element von A ist, dann schreibt man $x \notin A$.

Beispiel

Es gilt $2 \in \{1, 2, 3\}$, aber $4 \notin \{1, 2, 3\}$.

Inklusion

A ist Teilmenge von B (in Zeichen: $A \subseteq B$), falls jedes Element aus A in B enthalten ist. B wird oft Obermenge von A gennant. Falls A keine Teilmenge von B ist, dann schreibt man $A \nsubseteq B$.

Beispiel

Es gilt $\{1, 3\} \subseteq \{1, 2, 3\}$ und $\{1, 2, 3\} \subseteq \{1, 2, 3\}$, aber $\{3, 4\} \nsubseteq \{1, 2, 3\}$.

Mengengleichheit

Die Mengen A und B sind gleich (in Zeichen: $A = B$), falls $A \subseteq B$ und $B \subseteq A$ gelten. Falls A und B nicht gleich sind, dann schreibt man $A \neq B$.

Beispiel

Es gilt $\{1, 2, 3\} = \{1, 2, 3\}$, aber $\{2, 3, 4\} \neq \{1, 2, 3\}$.

Echte Inklusion

A ist eine echte Teilmenge von B (in Zeichen: $A \subset B$), falls $A \subseteq B$ und $B \nsubseteq A$ gelten. B wird dann echte Obermenge von A gennant.

Beispiel

Es gilt $\{1, 3\} \subset \{1, 2, 3\}$, aber $\{1, 2, 3\} \not\subset \{1, 2, 3\}$.

Info

In vielen Vorlesungen und Büchern wird das Zeichen $\subset$ für die normale Inklusion benutzt. In solchen Fällen wird die echte Inklusion mit $\subsetneq$ oder $\subsetneqq$ notiert.

Kardinalität

Die Kardinalität oder Mächtigkeit $|A|$ einer Menge A gibt die Anzahl der Elemente in A an. Falls die Anzahl an Elementen in A unendlich ist, dann schreibt man $|A| = \infty$.

Beispiele

Es gilt $|\{3, 4, 5\}| = 3$, $|\{\{2\}, \{3, 4, 5\}\}| = 2$, $|\{\}| = 0$ und $|\{\{\}\}| = 1$.

Quizfrage

Sei A eine Menge mit

$$A = \{a, 6, \{3, c, \{4, 1\}\}, \{\{\}\}, 6, \{b, d, 5\}\}.$$

Welche Kardinalität $|A|$ besitzt A?

Antwort

$$|A| = |\{\underbrace{a}_{1}, \underbrace{6}_{2}, \underbrace{\{3, c, \{4, 1\}\}}_{3}, \underbrace{\{\{\}\}}_{4}, \not{6}, \underbrace{\{b, d, 5\}\}}_{5}| = 5$$

Extensionale Schreibweise

Man zählt die Elemente der Menge explizit auf:

$$A = \{x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots\}.$$

Die extensionale Schreibweise ist eigentlich nur für endliche Mengen möglich. Wir benutzen sie aber auch für unendliche Mengen und schreiben „...“ wenn es ersichtlich ist, was damit gemeint ist.

Intensionale Schreibweise

Man kann Mengen auch durch diejenigen Elemente beschreiben, die eine Eigenschaft P haben. Die Menge

$$A = \{x \mid P(x)\}$$

enthält dann alle Elemente, die die Eigenschaft P erfüllen. Man schreibt oft auch $\{x \in U \mid P(x)\}$, um zu verdeutlichen, dass wir nur diejenigen Elemente aus der Menge U mit der Eigenschaft P betrachten.

Infos

- Für die intensionale Schreibweise kann man auch ein Doppelpunkt oder ein Semikolon als Trennzeichen benutzen. Folgende Darstellungen sind also gleichwertig:

$$\{x \in U \mid P(x)\}, \qquad \{x \in U : P(x)\}, \qquad \{x \in U ; P(x)\}.$$

  Ihr dürft natürlich alle drei Schreibweisen benutzen!

- Viele Mengen haben die Form

$$\{x \mid x = a(x_1, \ldots, x_k) \text{ für } x_1 \in A_1, \ldots, x_k \in A_k\},$$

  wobei $a(x_1, \ldots, x_k)$ ein mathematischer Ausdruck (eine Funktion) ist, welcher von den Parametern $x_1, \ldots, x_k$ abhängig ist. Für diese Mengen erlauben wir auch die Schreibweise:

$$\{a(x_1, \ldots, x_k) \mid x_1 \in A_1, \ldots, x_k \in A_k\}.$$

Wichtige Zahlenmengen

Wichtige endliche Zahlenmengen sind:

$$\begin{array}{lcll} \emptyset & = & \{\} & \text{(leere Menge)} \\ [n] & = & \{1, 2, \ldots, n\} & \text{(diskretes Intervall)} \\ \mathbb{Z}_n & = & \{0, 1, \ldots, n-1\} & \text{(Reste bei Division durch } n\text{)} \end{array}$$

Wichtige unendliche Zahlenmengen sind:

$$\begin{array}{lcll} \mathbb{N} & = & \{1, 2, 3, \ldots\} & \text{(natürliche Zahlen)} \\ \mathbb{N}_0 & = & \{0, 1, 2, 3, \ldots\} & \text{(natürliche Zahlen mit Null)} \\ \mathbb{Z} & = & \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\} & \text{(ganze Zahlen)} \\ \mathbb{Q} & = & \left\{ \frac{p}{q} \,\middle|\, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N} \right\} & \text{(rationale Zahlen)} \\ \mathbb{R} & = & \{d, d_1 d_2 d_3 \ldots \mid d \in \mathbb{Z}, d_1, d_2, d_3, \ldots \in \mathbb{Z}_{10}\} & \text{(reelle Zahlen)} \\ \mathbb{C} & = & \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}\} & \text{(komplexe Zahlen)} \end{array}$$

Info

Bei der Definition der sechs unendlichen Mengen in der vorherigen Folie habe ich mir das Leben sehr einfach gemacht. Die eigentlichen axiomatischen Definitionen sind viel komplizierter.

Deutlich komplizierter als für uns in DS nötig ;-)

Beispiele

Folgende Mengen sind extensional definiert:

- Menge aller natürlichen Zahlen zwischen 11 und 15:

$$\{11, 12, 13, 14, 15\}$$

- Menge aller Buchstaben des lateinischen Alphabets:

$$\{a, b, c, \ldots, z\}$$

- Menge aller ungeraden Zahlen:

$$\{\ldots, -7, -5, -3, -1, 1, 3, 5, 7, \ldots\}$$

- Menge aller Zweierpotenzen:

$$\{1, 2, 4, 8, 16, 32, \ldots\}$$

Dieselben Mengen können auch intensional wie folgt definiert werden:

- Menge aller natürlichen Zahlen zwischen 11 und 15:

$$\{x \in \mathbb{N} \mid 11 \leq x \leq 15\} = \{10 + k \mid k \in [5]\}$$

- Menge aller Buchstaben des lateinischen Alphabets:

$$\{x \mid x \text{ ist ein Buchstabe des lateinischen Alphabets}\}$$

- Menge aller ungeraden Zahlen:

$$\{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ ungerade}\} = \{2k + 1 \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

- Menge aller Zweierpotenzen:

$$\{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ ist eine Zweierpotenz}\} = \left\{2^k \,\middle|\, k \in \mathbb{N}_0\right\}$$

Quizfragen

Wie sehen folgende Mengen in extensionaler Schreibweise aus?

1. $\{|n-4| \mid n \in [7]\}$
2. $\{n \in \mathbb{Z} \mid |n-5| \leq 2\}$
3. $\{\cos(n\pi) \mid n \in \mathbb{N}_0\}$
4. $\left\{\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \mid n \in \mathbb{N}_0\right\}$

Antworten

1. $\{|n-4| \mid n \in [7]\} = \{3,2,1,0,1,2,3\} = \{0,1,2,3\}$.
2. $\{n \in \mathbb{Z} \mid |n-5| \leq 2\} = \{n \in \mathbb{Z} \mid -2 \leq n-5 \leq 2\} = \{3,4,5,6,7\}$.
3. $\{\cos(n\pi) \mid n \in \mathbb{N}_0\} = \{1,-1,1,-1,1,-1,1,\ldots\} = \{1,-1\}$.
4. $\{\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \mid n \in \mathbb{N}_0\} = \{0,1,0,-1,0,1,0,-1,0,\ldots\} = \{0,1,-1\}$.

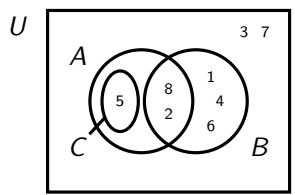
Graphische Darstellung von Mengen

Mengen und deren Beziehungen können mithilfe von Mengendiagrammen dargestellt werden. Das Universum U wird als Rechteck und die Mengen $A_1, \ldots, A_n$ als Kreise (bzw. Ovale) innerhalb des Rechtecks gezeichnet.

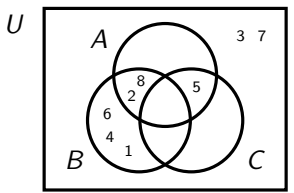
Bei Euler-Diagrammen werden nur die notwendigen Überlappungen der Flächen dargestellt. Bei Venn-Diagrammen dagegen werden alle möglichen Überlappungen eingezeichnet, selbst wenn einige davon leer bleiben.

Beispiel

Für $A = \{2, 5, 8\}$, $B = \{1, 2, 4, 6, 8\}$ und $C = \{5\}$ über $U = [8]$ erhält man:



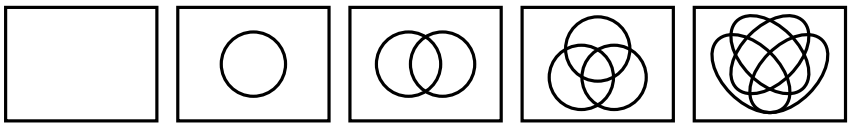
Euler-Diagram



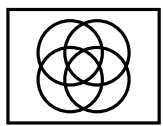
Venn-Diagram

Info

Bei Euler-Diagrammen wird das Universum durch n Mengen in höchstens 2^n Bereichen aufgeteilt. Venn-Diagramme sind ein Spezialfall von Euler-Diagrammen, bei denen die Anzahl solcher Bereiche genau 2^n ist.



Beispielsweise ist das Euler-Diagramm



kein Venn-Diagramm, weil die Anzahl der Bereiche 14 ist.

Potenzmenge

$\mathcal{P}(A)$ ist die Menge aller Teilmengen von A, also:

$$\mathcal{P}(A) := \{X \mid X \subseteq A\}.$$

Beispiele

Es gilt:

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}(\emptyset) &= \{\emptyset\}, \\
\mathcal{P}(\{1\}) &= \{\emptyset, \{1\}\}, \\
\mathcal{P}(\{1,2\}) &= \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}, \\
\mathcal{P}(\{1,2,3\}) &= \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}.
\end{aligned}$$

Info

Für jede endliche Menge A gilt: $|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$. Beispielsweise gilt für die Mengen aus der vorigen Folie:

$$\begin{aligned} |\mathcal{P}(\emptyset)| &= 2^0 = 1, \\ |\mathcal{P}(\{1\})| &= 2^1 = 2, \\ |\mathcal{P}(\{1,2\})| &= 2^2 = 4, \\ |\mathcal{P}(\{1,2,3\})| &= 2^3 = 8. \end{aligned}$$

Deswegen wird oft auch die Notation 2^A statt $\mathcal{P}(A)$ benutzt.

Quizfragen

Wie viele Elemente enthalten folgende Mengen?

1. $\mathcal{P}([6])$,
2. $\mathcal{P}(\mathcal{P}([3]))$,
3. $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)))$.

Erinnerung: $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$.

Antworten

1. $|\mathcal{P}([6])| = 2^6 = 64$.
2. $|\mathcal{P}(\mathcal{P}([3]))| = 2^{2^3} = 2^8 = 256$.
3. $|\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)))| = 2^{2^{2^0}} = 2^{2^1} = 2^2 = 4$.

Noch eine Quizfrage

Aus der letzten Quizfrage wissen wir, dass die Menge $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)))$ genau vier Elemente besitzt.

Welche sind das?

Antwort

Es gilt:

$$\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))) = \mathcal{P}(\mathcal{P}(\{\emptyset\})) = \mathcal{P}(\{\emptyset, \{\emptyset\}\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}.$$

Die vier Elemente sind dann: $\emptyset$, $\{\emptyset\}$, $\{\{\emptyset\}\}$ und $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$.

Operationen

Die wichtigsten Operationen auf Mengen sind:

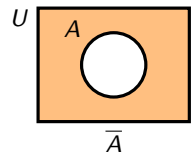
$$
\begin{array}{lcll}
\overline{A} & := & \{x \in U \mid x \notin A\} & \text{(Komplement)} \\
A \cap B & := & \{x \in U \mid x \in A \text{ und } x \in B\} & \text{(Schnitt)} \\
A \cup B & := & \{x \in U \mid x \in A \text{ oder } x \in B\} & \text{(Vereinigung)} \\
A \setminus B & := & \{x \in U \mid x \in A \text{ und } x \notin B\} & \text{(Differenz)} \\
A \triangle B & := & \{x \in U \mid \text{entweder } x \in A \text{ oder } x \in B\} & \text{(symmetrische Differenz)}
\end{array}
$$

$\cap$ und $\cup$ sind assoziativ. Für mehrere Mengen schreiben wir:

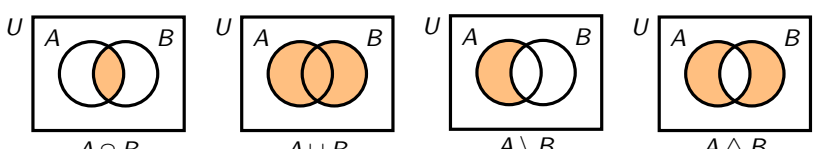
$$
\bigcap_{i=1}^{n} A_i := A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n, \qquad \bigcup_{i=1}^{n} A_i := A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n.
$$

Infos

- Man schreibt oft auch A^C oder A^0 statt $\overline{A}$ und $A - B$ statt $A \setminus B$.
- Die graphische Bedeutung des Komplements ist folgende:

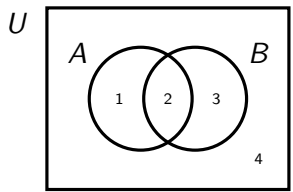


- Die graphische Bedeutung der zweistellingen Operationen $\cap$, $\cup$, $\setminus$ und $\triangle$ ist:



Beispiel

Seien $A = \{1, 2\}$ und $B = \{2, 3\}$ Mengen über dem Universum $U = [4]$.



Dann gilt:

$$
\begin{array}{lcllcl}
\overline{A} & = & \{x \in U \,|\, x \notin A\} & = & \{3, 4\}, \\
A \cap B & = & \{x \in U \,|\, x \in A \text{ und } x \in B\} & = & \{2\}, \\
A \cup B & = & \{x \in U \,|\, x \in A \text{ oder } x \in B\} & = & \{1, 2, 3\}, \\
A \setminus B & = & \{x \in U \,|\, x \in A \text{ und } x \notin B\} & = & \{1\}, \\
A \triangle B & = & \{x \in U \,|\, \text{entweder } x \in A \text{ oder } x \in B\} & = & \{1, 3\}.
\end{array}
$$

Quizfragen

Seien $A = \{1, 2, 3, 4\}$ und $B = \{3, 4, 5\}$ Mengen über dem Universum $U = [5]$. Was ist dann die Kardinalität folgender Mengen?

1. $\mathcal{P}(A \triangle B)$
2. $\mathcal{P}(\mathcal{P}(A \cap B))$
3. $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$

Antworten

1. Es gilt:
$$|\mathcal{P}(A \triangle B)| = |\mathcal{P}(\{1,2,5\})| = 2^3 = 8.$$
2. Es gilt:
$$|\mathcal{P}(\mathcal{P}(A \cap B))| = 2^{|\mathcal{P}(\{3,4\})|} = 2^{2^2} = 16.$$
3. Die Mengen A und B haben genau 4 gemeinsame Teilmengen: $\emptyset$, $\{3\}$, $\{4\}$ und $\{3,4\}$. Diese sind sowohl in $\mathcal{P}(A)$ als auch in $\mathcal{P}(B)$ drin und dürfen daher nicht doppelt gezählt werden. Daraus folgt:
$$|\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)| = |\mathcal{P}(A)| + |\mathcal{P}(B)| - 4 = 2^{|A|} + 2^{|B|} - 4 = 2^4 + 2^3 - 4 = 20.$$

Disjunktheit

- Zwei Mengen Mengen A und B heißen disjunkt, falls sie keine Elemente gemeinsam haben, d.h. wenn gilt:

$$A \cap B = \emptyset.$$

- Eine beliebige Familie $A_1, \ldots, A_n$ von Mengen heißt disjunkt, falls die Mengen paarweise disjunkt sind, d.h. wenn für alle $i, j \in [n]$ mit $i \neq j$ gilt:

$$A_i \cap A_j = \emptyset.$$

- Für disjunkte Mengen $A_1, \ldots, A_n$ gilt:

$$|A_1 \cup \ldots \cup A_n| = |A_1| + \ldots + |A_n|.$$

Info

Man schreibt auch $A_1 \uplus \ldots \uplus A_n$, um zu verdeutlichen, dass die Mengen $A_1, \ldots, A_n$ paarweise disjunkt sind.

Partitionen

Sei $k \in \mathbb{N}_0$. Eine k-Partition P einer Menge A ist eine Menge

$$P = \{A_1, \ldots, A_k\},$$

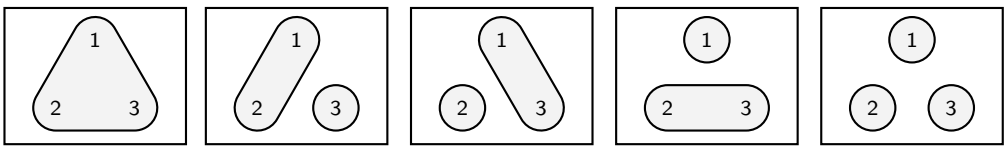
so dass $A = A_1 \cup \ldots \cup A_k$ gilt und die Mengen $A_1, \ldots, A_k$ alle nichtleer und paarweise disjunkt sind.

Infos

- Die Mengen $A_1, \ldots, A_k$ werden Partitionsklassen oder kurz Klassen genannt.
- Eine 2-Partition wird Bipartition genannt und eine 3-Partition Tripartition.
- Die einzige Partition P der leeren Menge $A = \emptyset$ ist die leere Partition $P = \{\}$.
- Die leere Partition ist die einzige 0-Partition.

Beispiel

Es gibt 5 verschiedene Partitionen der Menge [3]:



$P_1 = \{\{1,3,2\}\}$ $P_2 = \{\{1,2\},\{3\}\}$ $P_3 = \{\{1,3\},\{2\}\}$ $P_4 = \{\{1\},\{2,3\}\}$ $P_5 = \{\{1\},\{2\},\{3\}\}$

P_1 ist eine 1-Partition, P_2, P_3 und P_4 sind 2-Partitionen und P_5 ist eine 3-Partition.

Quizfrage

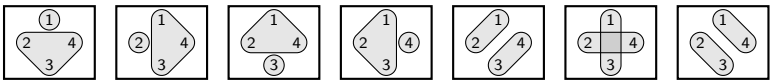
Wie viele verschiedene Partitionen besitzt die Menge $[4]$?

Antwort

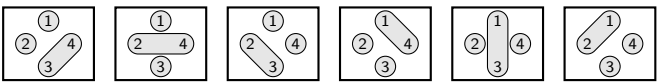
Es gibt 15 mögliche Partitionen der Menge [4]:

- eine 1-Partition,

- sieben 2-Partitionen,



- sechs 3-Partitionen



- und eine 4-Partition.

Rezept

Frage: Wie kann eine Mengengleichung über beliebige Mengen $A_1, \ldots, A_n$ bewiesen oder widerlegt werden?

Methode:

1. Definiere Mengen $A_1, \ldots, A_n$ über einem Universum U, so dass im Venn-Diagramm jeder der 2^n Bereiche genau ein Element enthält.
2. Rechne linke und rechte Seite der Gleichung mit diesen Mengen aus und vergleiche die Ergebnisse.
3. Falls sie gleich sind, so wurde die Gleichung bewiesen. Sonst wurde ein Gegenbeispiel für die Gleichung gefunden.

Achtung!

Einige Dozenten/Übungsleiter erlauben diese Methode nur zum Widerlegen, aber nicht zum Beweisen. Wenn das bei euch der Fall ist, dann müsst ihr Mengengleichungen wie auf Folie 61 mit den Rechenregeln von Folie 60 beweisen.

Beispiel

Aufgabe: Beweise folgende Mengengleichung:

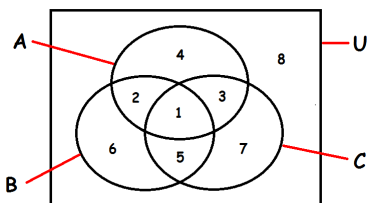
$$\overline{\overline{(A \cap B)} \cap \overline{(A \cap C)}} = A \cap (B \cup C).$$

Lösung:

1. Definiere o.B.d.A. („ohne Beschränkung der Allgemeinheit“) Mengen

$$A = \{1, 2, 3, 4\}, \qquad B = \{1, 2, 5, 6\}, \qquad C = \{1, 3, 5, 7\}$$

über dem Universum $U = [8]$. Dies entspricht folgendem Venn-Diagramm:



2. Rechne:

$$\begin{aligned}\overline{\overline{(A \cap B)} \cap \overline{(A \cap C)}} &= \overline{\overline{\{1,2\}} \cap \overline{\{1,3\}}} \\ &= \overline{\{3,4,5,6,7,8\} \cap \{2,4,5,6,7,8\}} \\ &= \overline{\{4,5,6,7,8\}} \\ &= \{1,2,3\}\end{aligned}$$

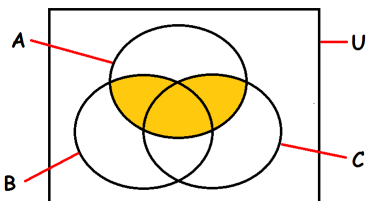
$$\begin{aligned}A \cap (B \cup C) &= \{1,2,3,4\} \cap (\{1,2,5,6\} \cup \{1,3,5,7\}) \\ &= \{1,2,3,4\} \cap \{1,2,3,5,6,7\} \\ &= \{1,2,3\}\end{aligned}$$

3. Wegen $\{1,2,3\} = \{1,2,3\}$ wurde die Mengengleichung bewiesen!

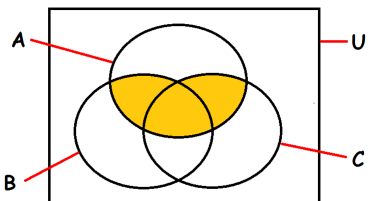
Wichtig!

Bitte nicht so:

„Die Gleichung gilt, weil die entsprechenden Venn-Diagramme gleich sind.“



$$\overline{\overline{(A \cap B)} \cap \overline{(A \cap C)}}$$



$$A \cap (B \cup C)$$

„Beweis durch schönes Bildchen“ ist kein Beweis!

Noch ein Beispiel

Aufgabe: Gilt die Mengengleichung

$$(B \cap C) \cup (A \setminus (B \cup C)) = A \cap (B \cup C)$$

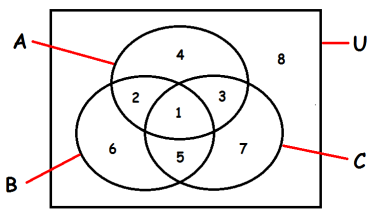
für beliebige Mengen A, B, C?

Lösung:

1. Definiere o.B.d.A. Mengen

$$A = \{1, 2, 3, 4\}, \qquad B = \{1, 2, 5, 6\}, \qquad C = \{1, 3, 5, 7\}$$

über dem Universum $U = [8]$. Dies entspricht folgendem Venn-Diagramm:



2. Rechne:

$$\begin{aligned}(B \cap C) \cup (A \setminus (B \cup C)) &= \{1,5\} \cup (\{1,2,3,4\} \setminus \{1,2,3,5,6,7\}) \\ &= \{1,5\} \cup \{4\} \\ &= \{1,4,5\}\end{aligned}$$

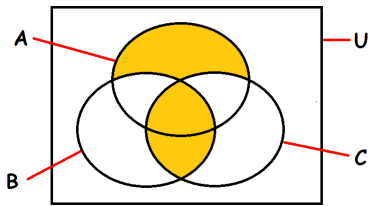
$$\begin{aligned}A \cap (B \cup C) &= \{1,2,3,4\} \cap (\{1,2,5,6\} \cup \{1,3,5,7\}) \\ &= \{1,2,3,4\} \cap \{1,2,3,5,6,7\} \\ &= \{1,2,3\}\end{aligned}$$

3. Wegen $\{1,4,5\} \neq \{1,2,3\}$ wurde die Mengengleichung durch Gegenbeispiel widerlegt.

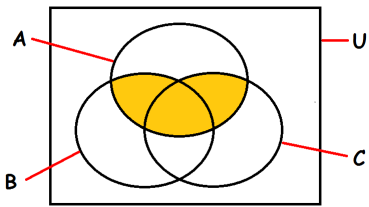
Wichtig!

Bitte nicht so:

„Die Gleichung gilt nicht, weil die entsprechende Venn-Diagramme ungleich sind.“



$(B \cap C) \cup (A \setminus (B \cup C))$



$A \cap (B \cup C)$

„Beweis durch schönes Bildchen“ ist auch hier kein Beweis!

Rezept

Frage: Was muss für Mengen $A_1, \ldots, A_n$ gelten, damit eine Mengengleichung stimmt?
Methode:

1. Führe die oben stehende Methode durch und bilde die symmetrische Differenz der Ergebnisse beider Seiten.
2. Entferne alle Elemente in der symmetrischen Differenz und interpretiere das Venn-Diagramm ohne die entsprechenden Bereiche.

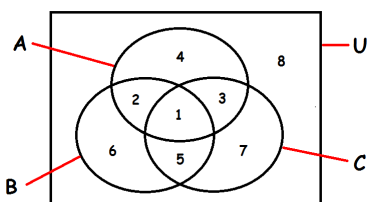
Beispiel (nochmal)

Aufgabe: Was muss für A, B, C gelten, damit die Mengengleichung

$$(B \cap C) \cup (A \setminus (B \cup C)) = A \cap (B \cup C)$$

stimmt?

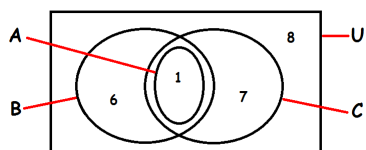
Erinnerung: Im vorigen Beispiel erhielten wir für das Venn-Diagramm



die Ergebnisse $(B \cap C) \cup (A \setminus (B \cup C)) = \{1, 4, 5\}$ und $A \cap (B \cup C) = \{1, 2, 3\}$.

Lösung:

1. Rechne:
$$\{1,4,5\} \triangle \{1,2,3\} = \{2,3,4,5\}.$$
2. Nach dem Löschen der Elemente $2,3,4,5$ und der entsprechenden Bereiche erhalten wir:



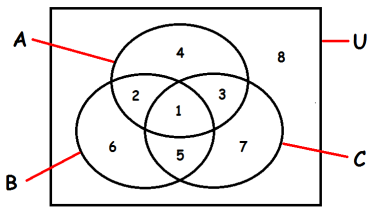
Damit die Gleichung stimmt, muss also $A = B \cap C$ gelten!

Aufgabe: Gilt die Mengengleichung

$$(\overline{A \cap B}) \cap C = (\overline{A} \cap C) \cup (B \cap C)$$

für beliebige Mengen A, B, C? Falls nicht, was müsste für A, B, C gelten, damit die Gleichung stimmt?

Hinweis: Benutze wieder die Mengen $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{1, 2, 5, 6\}$ und $C = \{1, 3, 5, 7\}$ über dem Universum $U = [8]$.



Antwort

Rechne:

$$\begin{aligned}(\overline{A \cap B}) \cap C &= (\overline{\{1,2,3,4\} \cap \{1,2,5,6\}}) \cap \{1,3,5,7\} \\ &= \overline{\{1,2\}} \cap \{1,3,5,7\} \\ &= \{3,4,5,6,7,8\} \cap \{1,3,5,7\} \\ &= \{3,5,7\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\overline{A} \cap C) \cup (B \cap C) &= (\overline{\{1,2,3,4\}} \cap \{1,3,5,7\}) \cup (\{1,2,5,6\} \cap \{1,3,5,7\}) \\ &= (\{5,6,7,8\} \cap \{1,3,5,7\}) \cup (\{1,2,5,6\} \cap \{1,3,5,7\}) \\ &= \{5,7\} \cup \{1,5\} \\ &= \{1,5,7\}\end{aligned}$$

Da $\{3,5,7\} \neq \{1,5,7\}$, gilt die Mengengleichung im Allgemeinen nicht.

Wegen

$$\{3,5,7\} \triangle \{1,5,7\} = \{1,3\}$$

entfernt man die Elemente 1 und 3 und die entsprechenden Bereiche aus dem Venn-Diagramm und interpretiert das Ergebnis.

Damit die Gleichung gilt muss also $A \cap C = \emptyset$ gelten!

Rechenregeln für Mengen

Seien $A, B, C \subseteq U$ beliebige Mengen über das Universum U. Ein paar nützliche Rechenregeln sind:

$A \cap U = A$	$A \cup \emptyset = A$	(Identität)
$A \cup U = U$	$A \cap \emptyset = \emptyset$	(Dominanz)
$A \cup A = A$	$A \cap A = A$	(Idempotenz)
$\overline{\overline{A}} = A$		(Doppeltes Komplement)
$A \cup B = B \cup A$	$A \cap B = B \cap A$	(Kommutativität)
$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$	(Assoziativität)
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	(Distributivität)
$\overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B}$	$\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B}$	(De Morgan)
$A \cup \overline{A} = U$	$A \cap \overline{A} = \emptyset$	(U und $\emptyset$)
$A \setminus B = A \cap \overline{B}$		(Differenz)
$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$		(symmetrische Differenz)
$A \cup (A \cap B) = A$	$A \cap (A \cup B) = A$	(Absorption)

Mit diesen Rechenregeln kann man auch Mengengleichungen beweisen.

Beispiel

Aufgabe: Beweise folgende Mengengleichung:

$$\overline{A \triangle B} = (\overline{A} \cap \overline{B}) \cup (A \cap B).$$

Lösung:

$$\begin{aligned}
\overline{A \triangle B} &= \overline{(A \setminus B) \cup (B \setminus A)} && \text{(symmetrische Differenz)} \\
&= \overline{(A \setminus B)} \cap \overline{(B \setminus A)} && \text{(De Morgan)} \\
&= \overline{(A \cap \overline{B})} \cap \overline{(B \cap \overline{A})} && \text{(Differenz)} \\
&= (\overline{A} \cup \overline{\overline{B}}) \cap (\overline{B} \cup \overline{\overline{A}}) && \text{(De Morgan)} \\
&= (\overline{A} \cup B) \cap (\overline{B} \cup A) && \text{(Doppeltes Komplement)} \\
&= ((\overline{A} \cup B) \cap \overline{B}) \cup ((\overline{A} \cup B) \cap A) && \text{(Distributivität)} \\
&= ((\overline{A} \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{B})) \cup ((\overline{A} \cap A) \cup (B \cap A)) && \text{(Distributivität)} \\
&= ((\overline{A} \cap \overline{B}) \cup \emptyset) \cup (\emptyset \cup (B \cap A)) && \text{(U und } \emptyset\text{)} \\
&= (\overline{A} \cap \overline{B}) \cup (A \cap B) && \text{(Identität)}
\end{aligned}$$

Themenübersicht

Tupel

Tupel stellen, im Gegensatz zu Mengen, geordnete Objekte dar. Wichtig ist:

- Es werden runde Klammern benutzt: $(\ldots)$.
- Komponenten werden durch Kommas getrennt.
- Die Reihenfolge der Komponenten ist relevant, z.B.:

$$(b, c, a) \neq (a, b, c).$$

- Die Anzahl an Kopien derselben Komponente ist auch relevant, z.B.:

$$(a, b, c, c, c, b) \neq (a, b, c).$$

- Die Komponenten eines Tupels können beliebige Objekte sein, z.B. Zahlen, Mengen oder wiederum Tupel.
- $()$ ist das leere Tupel. Es besitzt keine Komponenten.
- Mit $|\ldots|$ wird die Länge (die Anzahl an Komponenten) eines Tupels gekennzeichnet.

Quizfrage

Sei a ein Tupel mit

$$a = (5, \{3, 4\}, 7, \{\{3, 4\}, 8\}, 1, 5, \emptyset).$$

Welche Länge $|a|$ besitzt a?

Antwort

Die Länge $|a|$ von a ist

$$|a| = |(5, \{3, 4\}, 7, \{\{3, 4\}, 8\}, 1, 5, \emptyset)| = 7.$$

Kartesisches Produkt

Für ein beliebiges $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$A_1 \times \ldots \times A_n := \{(a_1, \ldots, a_n) \mid a_1 \in A_1, \ldots, a_n \in A_n\}$$

Beispiel

Für $A = \{a, b\}$, $B = \{c\}$, $C = \{d, e, f\}$ gilt:

$$A \times B \times C = \{(a, c, d), (a, c, e), (a, c, f), (b, c, d), (b, c, e), (b, c, f)\}$$

Infos

- Falls $|A_1|, \ldots, |A_n| < \infty$, dann gilt immer: $|A_1 \times \ldots \times A_n| = |A_1| \cdot \ldots \cdot |A_n|$.
- A^n ist eine Abkürzung für $\underbrace{A \times A \times \ldots \times A}_{n \text{ mal}}$.
- Das kartesische Produkt ist nicht assoziativ. Klammern machen nämlich schon einen Unterschied. Beispielsweise gilt für $A = \{a, b\}$, $B = \{c\}$, $C = \{d, e\}$ einerseits

$$\begin{aligned}(A \times B) \times C &= \{(a, c), (b, c)\} \times \{d, e\} \\ &= \{((a, c), d), ((a, c), e), ((b, c), d), ((b, c), e)\}\end{aligned}$$

und andererseits

$$\begin{aligned}A \times (B \times C) &= \{a, b\} \times \{(c, d), (c, e)\} \\ &= \{(a, (c, d)), (a, (c, e)), (b, (c, d)), (b, (c, e))\}.\end{aligned}$$

Quizfragen

Seien $A = \{1, 2, 3, 4\}$ und $B = \{3, 4, 5\}$. Was ist dann die Kardinalität folgender Mengen?

1. $(A \cup B) \times (A \cap B)$
2. $\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$
3. $(A \times A) \cup (B \times B)$

Antworten

1. Es gilt:

$$|(A \cup B) \times (A \cap B)| = |\{1,2,3,4,5\} \times \{3,4\}| = |\{1,2,3,4,5\}| \cdot |\{3,4\}| = 5 \cdot 2 = 10.$$

2. Es gilt:

$$|\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)| = |\mathcal{P}(A)| \cdot |\mathcal{P}(B)| = 2^{|A|} \cdot 2^{|B|} = 2^4 \cdot 2^3 = 128.$$

3. Die Tupel $(3,3)$, $(3,4)$, $(4,3)$ und $(4,4)$ sind sowohl in $A \times A$ als auch in $B \times B$ drin und dürfen daher nicht doppelt gezählt werden. Daraus folgt:

$$|(A \times A) \cup (B \times B)| = |(A \times A)| + |(B \times B)| - 4 = |A| \cdot |A| + |B| \cdot |B| - 4 = 4 \cdot 4 + 3 \cdot 3 - 4 = 21.$$

Wörter

Bestehen die Komponenten der Tupel aus einzelnen Zeichen, so kann man die Klammern und die Kommas weglassen und die Zeichen nebeneinander schreiben. Beispielsweise kann man das Tupel (b, a, b, c, c) als Wort *babcc* notieren.

- Man nennt die Tupel dann Wörter.
- Die Menge aller Zeichen, die als Komponenten in den Tupeln vorkommen können, nennt man dann Alphabet Σ.
- Das leere Wort (das Wort ohne Zeichen bzw. mit Länge Null) ist ϵ.
- $\Sigma^n = \underbrace{\Sigma\Sigma\Sigma\ldots\Sigma}_{n \text{ mal}}$ ist die Menge aller Wörter über Σ der Länge n.
- $\Sigma^* = \bigcup_{n=0}^{\infty} \Sigma^n$ ist die Menge aller Wörter über Σ mit beliebiger Länge
- Eine Menge $L \subseteq \Sigma^*$ von Wörtern nennt man passenderweise eine Sprache.

Infos

- Nicht irritieren lassen! Das Σ („Sigma“) hier hat nichts mit dem Summenzeichen in z.B.

$$\sum_{i=0}^{n} a_i = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$$

  zutun. Das eine Σ ist eine Menge, das andere ist ein Operator.
- ϵ ist nur ein Zeichen, was man sich ausgedacht hat, um sich auf das leere Wort, (das leere Tupel () als Wort geschrieben) beziehen zu können.
- Um Verwirrungen zu vermeiden, wählt man Σ so, dass kein Zeichen Teil eines anderen Zeichens ist. Würde man beispielsweise $\Sigma = \{a, ab, b\}$ wählen, so wäre nicht eindeutig, ob das Wort aba für (a, b, a) oder (ab, a) steht.

Konkatenation

Für beliebige Tupel $a = (a_1, \ldots, a_k)$ und $b = (b_1, \ldots, b_m)$ gilt:

$$ab = (a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_m).$$

Für beliebige Tupelmengen A, B gilt:

$$AB := \{ab \mid a \in A, b \in B\}.$$

Info

Bei der Konkatenation AB von Tupelmengen A, B konkateniert man jedes Tupel aus A mit jedem aus B. Die Ergebnisse sind alle in AB enthalten.

Beispiele (mit Tupeln)

- Seien $A = \{(x), (x, y), (y, x)\}$ und $B = \{(), (z, y)\}$. Dann gilt:

$$AB = \{(x), (x, z, y), (x, y), (x, y, z, y), (y, x), (y, x, z, y)\}.$$

- Seien $A = \{(a), (a, b)\}$, $B = \{(c, b)\}$ und $C = \{(b), (b, c)\}$. Dann gilt:

$$ABC = \{(a, c, b, b), (a, c, b, b, c), (a, b, c, b, b), (a, b, c, b, b, c)\}.$$

Infos

- Konkatenieren macht mit Wörtern viel mehr Spaß als mit Tupeln. Fasst man $a = (a_1, \ldots, a_k)$ und $b = (b_1, \ldots, b_m)$ als Wörter $a = a_1 \ldots a_k$ und $b = b_1 \ldots b_m$ auf, so gilt für die Konkatenation von a und b:

$$ab = a_1 \ldots a_k b_1 \ldots b_m.$$

  Man „klebt“ also einfach die Wörter aneinander.

- Wir werden die Konkatenation so gut wie immer nur auf Wörtern anwenden!
- Für ein beliebiges Zeichen $a \in \Sigma$ gilt:

$$\epsilon a = a = a\epsilon.$$

Beispiele (mit Wörtern)

- Seien $A = \{x, xy, yx\}$ und $B = \{\epsilon, zy\}$ zwei Sprachen über dem Alphabet $\Sigma = \{x, y, z\}$. Dann gilt:

$$AB = \{x, xzy, xy, xyzy, yx, yxzy\}.$$

- Seien $A = \{a, ab\}$, $B = \{cb\}$ und $C = \{b, bc\}$ drei Sprachen über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Dann gilt:

$$ABC = \{acbb, acbbc, abcbb, abcbbc\}.$$

Infos

- Die Konkatenation ist assoziativ, d.h. man kann auch hier die Klammern weglassen!
- Für eine Tupelmenge bzw. Sprache A definieren wir

$$A^n = \underbrace{AAA\ldots A}_{n \text{ mal}}, \qquad A^+ = \bigcup_{n=1}^{\infty} A^n \qquad \text{und} \qquad A^* = \bigcup_{n=0}^{\infty} A^n.$$

Achtung!

Bei der Konkatenation können Duplikate entstehen! Man kann also, im Gegensatz zum kartesischen Produkt, keine Formel für $|A_1 A_2 \dots A_n|$ in Abhängigkeit von $|A_1|, |A_2|, \dots, |A_n|$ angeben.

Zum Beispiel gilt für $A = \{a, ab\}$ und $B = \{a, ba\}$:

$$AB = \{aa, aba, aba, abba\} = \{aa, aba, abba\}.$$

Quizfrage

Seien $\Sigma = \{x, y\}$ ein Alphabet und $A, B \subseteq \Sigma^*$ zwei Sprachen über Σ mit $A = \{\epsilon, x, xy, xyy\}$ und $B = \{\epsilon, y, yy\}$.

Wie sieht AB extensional aus?

Antwort

$$
\begin{aligned}
AB &= \{\epsilon\epsilon, \epsilon y, \epsilon yy, x\epsilon, xy, xyy, xy\epsilon, xyy, xyyy, xyy\epsilon, xyyy, xyyyy\} \\
&= \{\epsilon, y, yy, x, xy, xyy, xy, xyy, xyyy, xyy, xyyy, xyyyy\} \\
&= \{\epsilon, y, yy, x, xy, xyy, xyyy, xyyyy\}.
\end{aligned}
$$

Philosophische Frage

Sei A die Menge aller Mengen, die sich nicht selbst als Element enthalten. D.h.

$$A = \{X \mid X \notin X\}.$$

Enthält A sich selbst?

Antwort

Diese Frage kann leider nicht beantwortet werden, weil beide Antwortmöglichkeiten zu einem Widerspruch führen würden. Die Problematik dieser Frage wurde 1903 von dem britischen Mathematiker Bertrand Russell publiziert und ist eins von mehreren Paradoxien der „naiven Mengenlehre“.

Probleme wie dieses können mithilfe sogenannter „axiomatischen Mengenlehren“ umgangen werden. Diese Arten von Mengenlehren sind leider etwas komplizierter und gehören deshalb nicht zur DS-Vorlesung.

Für Interessierte:

- `http://de.wikipedia.org/wiki/Naive_Mengenlehre`
- `http://de.wikipedia.org/wiki/Russellsche_Antinomie`

Themenübersicht

Mathematische Aussagen

Eine Aussage ist ein sprachliches Konstrukt, dem man genau einen der Wahrheitswerte *wahr* oder *falsch* zuordnen kann. Eine Aussage gilt, wenn sie den Wahrheitswert *wahr* besitzt.

Die Negation einer Aussage ist wiederum eine Aussage. Durch die Negation einer Aussage wird ihr Wahrheitswert in sein Gegenteil gekehrt. Für die Negation einer Aussage A schreiben wir einfach:

$$\text{nicht } A.$$

Zwei Aussagen A und B sind äquivalent, wenn sie denselben Wahrheitswert besitzen.

UND-Aussagen

Sind F und G Aussagen, dann ist auch

$$F \text{ und } G$$

eine Aussage. Diese gilt genau dann, wenn sowohl F als auch G gelten.

Die Negation davon ist:

$$\text{nicht } F \text{ oder nicht } G.$$

ODER-Aussagen

Sind F und G Aussagen, dann ist auch

$$F \text{ oder } G$$

eine Aussage. Diese gilt genau dann, wenn mindestens eine der Aussagen F und G gilt. Die Negation davon ist:

$$\text{nicht } F \text{ und nicht } G.$$

WENN-DANN-Aussagen

Sind F und G Aussagen, dann ist auch

$$\text{Wenn } F \text{ dann } G$$

eine Aussage. Diese gilt genau dann, wenn F und G beide gelten oder wenn F nicht gilt. In dem Fall, dass F nicht gilt, ist der Wahrheitswert von G egal, weil über ihn nichts gesagt wurde, die gesamte Aussage ist dann wahr.

Man nennt diese Aussagen Implikationen und schreibt kurz:

$$F \Longrightarrow G.$$

Diese sind äquivalent zu:

$$\text{nicht } F \text{ oder } G.$$

Gilt eine Implikation $F \Longrightarrow G$ nicht, so schreibt man kurz $F \not\Longrightarrow G$.

GENAU-DANN-WENN-Aussagen

Sind F und G Aussagen, dann ist auch

$$F \text{ genau dann, wenn } G$$

eine Aussage. Diese ist genau dann wahr, wenn F und G beide wahr oder beide falsch sind. Diese Aussage kann auch wie folgt formuliert werden:

$$F \text{ dann und nur dann, wenn } G$$

Man nennt diese Aussagen Äquivalenzen und schreibt kurz:

$$F \iff G.$$

Diese sind äquivalent zu:

$$F \implies G \text{ und } G \implies F.$$

Gilt eine Äquivalenz $F \iff G$ nicht, so schreibt man kurz: $F \not\iff G$.

Allaussagen

Ist A eine Menge und F eine Aussage, die von ein Element x abhängig sein kann, dann ist

$$\text{Für alle } x \in A \text{ gilt } F$$

auch eine Aussage. Diese ist wahr, wenn F für alle $x \in A$ wahr ist. Die Negation dieser Aussage ist

$$\text{Es gibt ein } x \in A \text{ für das nicht } F \text{ gilt.}$$

Man nennt solche Aussagen Allaussagen und schreibt kurz:

$$\forall x \in A : F.$$

Gilt die Aussage $A(x)$ nicht für alle (aber vielleicht für einige) $x \in A$, dann schreiben wir:

$$\not\forall\, x \in A : F.$$

Existenzaussagen

Ist A eine Menge und F eine Aussage, die von einem Element x abhängig sein kann, dann ist

$$\text{Es gibt ein } x \in A \text{ für das } F \text{ gilt}$$

auch eine Aussage. Diese ist wahr, wenn F für mindestens ein $x \in A$ wahr ist. Die Negation dieser Aussage ist

$$\text{Für alle } x \in A \text{ gilt nicht } F.$$

Man nennt solche Aussagen Existenzaussagen und schreibt kurz:

$$\exists x \in A : F.$$

Gibt es gar kein $x \in A$ für das die Aussage F gilt, dann schreiben wir:

$$\nexists x \in A : F.$$

Wichtig

Die Symbole $\Longrightarrow$, $\Longleftrightarrow$, $\forall$ und $\exists$ sind keine formale Operatoren, sondern nur Abkürzungen, um Aussagen kompakter darstellen zu können.

Für ihre Verwendung gibt es keine definierte Regeln. Wichtig ist nur, dass man sie so verwendet, dass der Leser versteht, was gemeint ist.

$\Longrightarrow$ und $\Longleftrightarrow$ machen nur bei Aussagen Sinn! Ausdrücke wie

$$\{1,2\} \cup \{2,3\} \Longleftrightarrow \{1,2,3\} \quad \text{oder} \quad (a+b)^2 \Longleftrightarrow a^2 + 2ab + b^2$$

sind nicht nur falsch, sondern es tut sogar weh sie zu lesen!

Beispiele

- Für beliebige Mengen $A, B \subseteq U$ über einem Universum U können $\subseteq$, $=$ und $\subset$ wie folgt kompakt definiert werden:

$$\begin{aligned} A \subseteq B &:\iff (\forall x \in U : x \in A \implies x \in B) \\ A = B &:\iff (\forall x \in U : x \in A \iff x \in B) \\ A \subset B &:\iff (\forall x \in U : x \in A \implies x \in B) \text{ und } (\exists x \in U : x \notin A \text{ und } x \in B) \end{aligned}$$

- Die Aussage

Es gibt beliebig große Primzahlen

könnte wie folgt kompakt formuliert werden:

$$\forall x \in \mathbb{N} : \exists y \in \mathbb{N} : (y \text{ prim und } y > x).$$

Quizfragen

Wie kann man folgende Aussagen kompakt darstellen?

1. Es gibt eine ganze Zahl, die größer ist als alle anderen.
2. Es gibt keine ganze Zahl, die größer ist als alle anderen.
3. Die Summe von zwei geraden Zahlen ist wieder gerade.

Benutze ausschließlich folgende Bausteine: $\forall$, $\exists$, x, y, $\in$, $\mathbb{Z}$, :, (,), $\leq$, $<$, und, gerade, $\Longrightarrow$ und $+$.

Antworten

1. $\exists x \in \mathbb{Z} : \forall y \in \mathbb{Z} : y < x$.
2. $\nexists x \in \mathbb{Z} : \forall y \in \mathbb{Z} : y < x$, was äquivalent ist zu: $\forall x \in \mathbb{Z} : \exists y \in \mathbb{Z} : x \leq y$.
3. $\forall x \in \mathbb{Z} : \forall y \in \mathbb{Z} : (x$ gerade und y gerade$) \Longrightarrow x + y$ gerade, was auch wie folgt geschrieben werden kann: $\forall x, y \in \mathbb{Z} : x$ und y gerade $\Longrightarrow x + y$ gerade.

Mehr Quizfragen (Männer sind Schweine ♪)

Sei M die Menge aller Menschen. Wie kann man folgende Aussagen kompakt darstellen?

1. Jeder Mann ist ein Schwein.
2. Nur Männer können Schweine sein.
3. Es gibt Männer, die keine Schweine sind.
4. Manche Schweine sind Männer.
5. Jeder Mann ist ein Schwein und jedes Schwein ist ein Mann.
6. Wenn alle Menschen Männer sind, dann sind sie auch alle Schweine.
7. Jeder Mensch ist ein Mann oder ein Schwein.
8. Es gibt keine Schweine.

Benutze ausschließlich folgende Bausteine: $\forall$, $\exists$, x, $\in$, M, :, (,), $\Longrightarrow$, $\Longleftrightarrow$, und, oder, ist Mann, ist Schwein, ist kein Mann, ist kein Schwein.

Antworten

1. $\forall x \in M : x$ ist Mann $\implies x$ ist Schwein.
2. $\forall x \in M : x$ ist Schwein $\implies x$ ist Mann bzw.
   $\forall x \in M : x$ ist kein Mann $\implies x$ ist kein Schwein.
3. $\exists x \in M : x$ ist Mann und x ist kein Schwein.
4. $\exists x \in M : x$ ist Schwein und x ist Mann.
5. $(\forall x \in M : x$ ist Mann $\implies x$ ist Schwein) und $(\forall x \in M : x$ ist Schwein $\implies$ x ist Mann), bzw. $\forall x \in M : x$ ist Mann $\iff x$ ist Schwein.
6. $(\forall x \in M : x$ ist Mann$) \implies (\forall x \in M : x$ ist Schwein$)$
7. $\forall x \in M : x$ ist Mann oder x ist Schwein.
8. $\nexists x \in M : x$ ist Schwein, bzw. $\forall x \in M : x$ ist kein Schwein.

Themenübersicht

Themenübersicht

Relationen

- R ist eine binäre Relation über den Mengen A und B, falls gilt:

$$R \subseteq A \times B.$$

  Man nennt dann A die Quellmenge und B die Zielmenge von R.

- R ist eine homogene binäre Relation über der Menge A, falls gilt:

$$R \subseteq A \times A.$$

  Man nennt dann A die Grundmenge von R.

Infos

- Weil wir in der Vorlesung nur binäre Relationen betrachten, lassen wir das Wort *binär* immer weg!
- Homogene Relationen sind Relationen, bei denen die Quell- und die Zielmenge gleich sind.

Beispiele

- Eine abstrakte Relation über [2] und [4] ist:

$$R = \{(1,1),(1,3),(2,3),(2,4)\}.$$

- Eine abstrakte homogene Relation über [3] ist:

$$R = \{(1,1),(1,3),(2,3),(3,1),(3,3)\}.$$

- Bekannte homogene Relationen über $\mathbb{Z}$ sind $=$, $\neq$, $\leq$, und $<$.
- Sei A eine beliebige Menge. Bekannte homogene Relationen über $\mathcal{P}(A)$ sind $=$, $\neq$, $\subseteq$, $\not\subseteq$, $\subset$ und $\not\subset$.
- Sei A wieder eine beliebige Menge. Eine bekannte Relation über A und $\mathcal{P}(A)$ ist die Elementrelation $\in$.

Infos

Wir benutzen oft die Infixnotation $a\,R\,b$ anstatt der normalen Notation $(a, b) \in R$. Wir benutzen die Infixnotation vor allem dann, wenn wir ein tolles Relationensymbol für R haben. Beispielsweise ist $3 \leq 5$ nichts anderes als die Infixnotation für $(3, 5) \in \leq$, was zwar eigentlich korrekt wäre, aber schrecklich aussieht!

Für $(a, b) \notin R$ benutzen wir einfach $a \not R\ b$. So kann beispielsweise $5 \neq 7$ sowohl für $(5, 7) \notin =$ als auch für $(5, 7) \in \neq$ stehen, falls man $\neq$ als eigene Relation auffassen möchte.

Quizfrage

Wie viele verschiedene Relationen über [3] und [4] gibt es?

Antwort

So viele, wie es Teilmengen von $[3] \times [4]$ gibt. Insgesamt gibt es also

$$|\mathcal{P}([3] \times [4])| = 2^{|[3]\times[4]|} = 2^{12} = 4096$$

solche Relationen.

Einschränkung

Oft möchte man nur einen Teil der Relation betrachten. Hierfür sind Einschränkungen hilfreich.

- Seien A, A', B, B' Mengen mit $A' \subseteq A$ und $B' \subseteq B$ und R eine Relation über A und B. Dann ist die Einschränkung von R auf A' und B' gegeben durch:

$$R \cap (A' \times B').$$

- Seien A und A' zwei Mengen mit $A' \subseteq A$ und R eine homogene Relation über A. Dann ist die Einschränkung von R auf A' gegeben durch:

$$R \cap (A' \times A').$$

Beispiele

- Die Einschränkung von $=$ auf $[5]$ ist

$$\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5)\}.$$

- Die Einschränkung von $\neq$ auf $[3]$ ist

$$\{(1,2),(1,3),(2,1),(2,3),(3,1),(3,2)\}.$$

- Die Einschränkung von $\leq$ auf $[3]$ ist

$$\{(1,1),(1,2),(1,3),(2,2),(2,3),(3,3)\}.$$

Quizfragen

1. Was ist die Einschränkung der Kleiner-Relation $<$ auf $[4]$?
2. Was ist die Einschränkung der Echte-Teilmenge-Relation $\subset$ auf $\mathcal{P}([2])$?
3. Was ist die Einschränkung der Element-Relation $\in$ auf $[2]$ und $\mathcal{P}([2])$?

Antworten

1. Die Einschränkung von $<$ auf $[4]$ ist

$$\{(1,2),(1,3),(1,4),(2,3),(2,4),(3,4)\}.$$

2. Die Einschränkung von $\subset$ auf $\mathcal{P}([2])$ ist

$$\{(\emptyset,\{1\}),(\emptyset,\{2\}),(\emptyset,\{1,2\}),(\{1\},\{1,2\}),(\{2\},\{1,2\})\}.$$

3. Die Einschränkung von $\in$ auf $[2]$ und $\mathcal{P}([2])$ ist:

$$\{(1,\{1\}),(1,\{1,2\}),(2,\{2\}),(2,\{1,2\})\}.$$

Graphische Darstellung von Relationen

Jede Relation R über A und B kann als Graph dargestellt werden. Die Elemente aus A werden links und die aus B rechts als Punkte (Knoten) gezeichnet. Die Tupel aus R werden als Pfeile (Kanten) dargestellt: „$a \longrightarrow b$“ bedeutet „$(a, b) \in R$“.

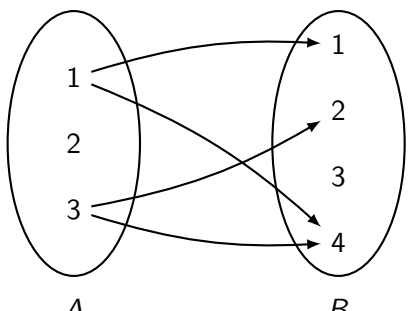
Ist R homogen, dann kann man auch jedes Element nur einmal als Knoten zeichnen.

Beispiel

Die Relation R über [3] und [4] mit

$$R = \{(1,1),(1,4),(3,2),(3,4)\}$$

kann graphisch wie folgt dargestellt werden:



Beispiel

Die homogene Relation R über $[3]$ mit

$$R = \{(1,1),(1,2),(2,3),(3,2),(3,3)\}$$

kann graphisch wie folgt dargestellt werden:

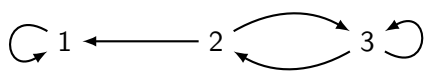


Bild und Urbild einer Relation

Seien A und B Mengen und R eine Relation über A und B. Das Bild und das Urbild von R sind definiert als:

$$\begin{aligned} \text{Bild}(R) &:= \{b \in B \mid \exists a \in A : (a, b) \in R\} \\ \text{Urbild}(R) &:= \{a \in A \mid \exists b \in B : (a, b) \in R\} \end{aligned}$$

Info

Intuitiv enthält

- das Urbild von R alle Elemente $a \in A$, die in mindestens einem Tupel (a, b) als erste Komponente vorkommen (bzw. von mindestens einer Kante verlassen werden) und
- das Bild von R alle Elemente $b \in B$, die in mindestens einem Tupel (a, b) als zweite Komponente vorkommen (bzw. von mindestens einer Kante getroffen werden).

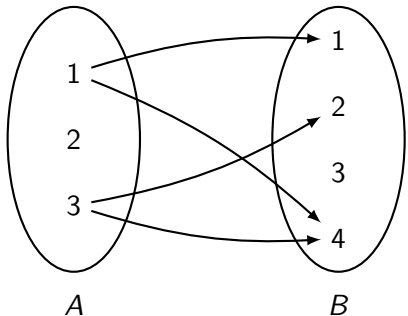
Wichtig!

Man benutzt das Zeichen $:=$ um zu verdeutlichen, dass der Ausdruck auf der rechten Seite der Gleichung per Definition gleich dem auf der linken Seite ist.

Gleichungen, die ein Doppelpunkt vor dem Gleichheitszeichen haben, sind insbesondere nicht beweisbar. Sie können nur angenommen werden.

Beispiel

Sei R wieder folgende Relation:



Das Bild und Urbild von R sind:

$$\text{Bild}(R) = \{1, 2, 4\} \quad \text{und} \quad \text{Urbild}(R) = \{1, 3\}.$$

Umkehr- und Komplementärrelation

Seien A und B zwei Mengen und R eine Relation über A und B. Wir definieren:

$$\begin{aligned} R^{-1} &:= \{(a,b) \mid (b,a) \in R\} \quad \text{(Umkehrrelation)}, \\ \overline{R} &:= \{(a,b) \mid (a,b) \notin R\} \quad \text{(Komplementärrelation)}. \end{aligned}$$

Infos

- Es gilt $\overline{R} \subseteq A \times B$, aber $R^{-1} \subseteq B \times A$.
- Insbesondere gelten die Gleichungen $|R^{-1}| = |R|$ und $|\overline{R}| = |A| \cdot |B| - |R|$.
- Haben wir für R ein tolles Relationensymbol (z.B. „$\leq$“), dann kann man R^{-1} bzw. $\overline{R}$ darstellen, indem man das Symbol für R umdreht (z.B. „$\geq$“) bzw. durchstreicht (z.B. „$\not\leq$“).

Beispiel

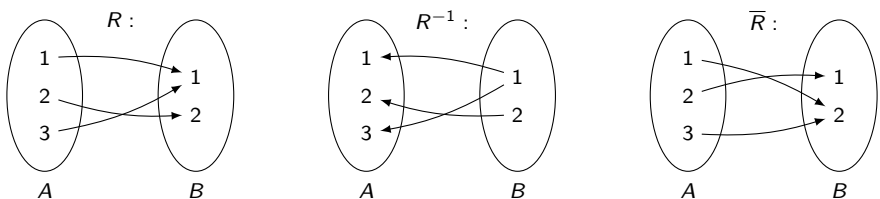
Sei R eine Relation über [3] und [2] mit

$$R = \{(1,1),(2,2),(3,1)\}.$$

Dann gilt für R^{-1} und $\overline{R}$:

$$R^{-1} = \{(1,1),(1,3),(2,2)\} \quad \text{und} \quad \overline{R} = \{(1,2),(2,1),(3,2)\}.$$

Graphisch:



Eigenschaften von Relationen

Seien A und B Mengen und R eine Relation über A und B. Dann heißt R:

- linkstotal, falls für alle $a \in A$ gilt:

$$|\{b \in B \,|\, (a,b) \in R\}| \geq 1,$$

- rechtseindeutig, falls für alle $a \in A$ gilt:

$$|\{b \in B \,|\, (a,b) \in R\}| \leq 1.$$

In kompakter Schreibweise heißt das:

$$\begin{array}{lll} R \text{ linkstotal} & :\Longleftrightarrow & \forall a \in A : |\{b \in B \,|\, (a,b) \in R\}| \geq 1 \\ R \text{ rechtseindeutig} & :\Longleftrightarrow & \forall a \in A : |\{b \in B \,|\, (a,b) \in R\}| \leq 1 \end{array}$$

Info

Intuitiv ist eine Relation R über A und B

- linkstotal, falls jedes Element aus A in mindestens einem Tupel vorkommt (bzw. von mindestens einer Kante verlassen wird) und
- rechtseindeutig, falls jedes Element aus A in höchstens einem Tupel vorkommt (bzw. von höchstens einer Kante verlassen wird).

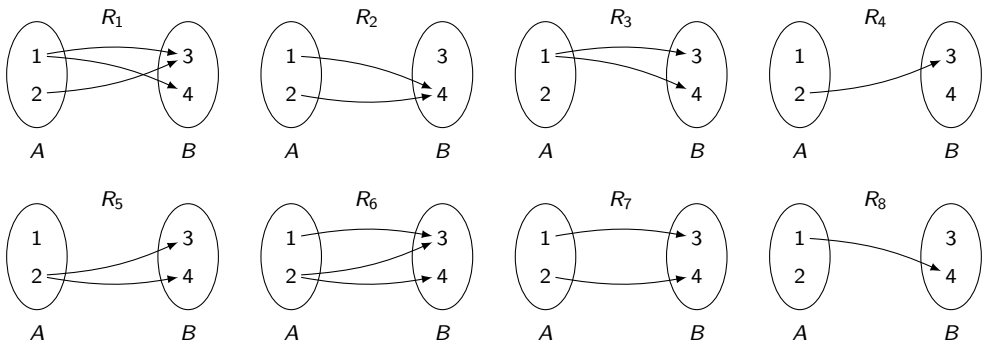
Wichtig!

Man benutzt das Zeichen $:\Longleftrightarrow$ um zu verdeutlichen, dass die Aussage auf der rechten Seite des Äquivalenzzeichens per Definition äquivalent zu der auf der linken Seite ist.

Äquivalenzen, die ein Doppelpunkt vor dem Äquivalenzzeichen haben, sind insbesondere nicht beweisbar. Sie können, analog zu den Gleichungen mit dem Zeichen $:=$, nur angenommen werden.

Beispiele

Seien $R_1, \ldots, R_8$ folgende Relationen über $A = \{1, 2\}$ und $B = \{3, 4\}$:



R_1, R_2, R_6 und R_7 sind linkstotal. R_2, R_4, R_7 und R_8 sind rechtseindeutig.

Eigenschaften homogener Relationen

Seien A eine Menge und R eine homogene Relation über A. Dann heißt R:

- reflexiv, falls für alle $a \in A$ gilt:

$$(a, a) \in R,$$

- symmetrisch, falls für alle $a, b \in A$ gilt:

$$\text{wenn } (a, b) \in R, \text{ dann } (b, a) \in R,$$

- asymmetrisch, falls für alle $a, b \in A$ gilt:

$$\text{wenn } (a, b) \in R, \text{ dann } (b, a) \notin R,$$

- antisymmetrisch, falls für alle $a, b \in A$ gilt:

$$\text{wenn } (a, b) \in R \text{ und } (b, a) \in R, \text{ dann } a = b,$$

- total, falls für alle $a, b \in A$ gilt:

$$\text{wenn } (a, b) \notin R, \text{ dann } (b, a) \in R,$$

- transitiv, falls für alle $a, b, c \in A$ gilt:

$$\text{wenn } (a, b) \in R \text{ und } (b, c) \in R, \text{ dann } (a, c) \in R.$$

In kompakter Schreibweise heißt das:

$$
\begin{array}{lll}
R \text{ reflexiv} & :\Longleftrightarrow & \forall a \in M : (a,a) \in R \\
R \text{ symmetrisch} & :\Longleftrightarrow & \forall a,b \in M : (a,b) \in R \Longrightarrow (b,a) \in R \\
R \text{ asymmetrisch} & :\Longleftrightarrow & \forall a,b \in M : (a,b) \in R \Longrightarrow (b,a) \notin R \\
R \text{ antisymmetrisch} & :\Longleftrightarrow & \forall a,b \in M : ((a,b) \in R \text{ und } (b,a) \in R) \Longrightarrow a = b \\
R \text{ total} & :\Longleftrightarrow & \forall a,b \in M : (a,b) \notin R \Longrightarrow (b,a) \in R \\
R \text{ transitiv} & :\Longleftrightarrow & \forall a,b,c \in M : ((a,b) \in R \text{ und } (b,c) \in R) \Longrightarrow (a,c) \in R
\end{array}
$$

Infos

- Um zu zeigen, dass eine Eigenschaft nicht gilt, reicht es, eine Kombination von konkreten Elementen zu finden, die die Bedingung nicht erfüllt. Es gilt nämlich:

R nicht reflexiv	$\iff$	$\exists a \in M : (a, a) \notin R$
R nicht symmetrisch	$\iff$	$\exists a, b \in M : (a, b) \in R$ und $(b, a) \notin R$
R nicht asymmetrisch	$\iff$	$\exists a, b \in M : (a, b) \in R$ und $(b, a) \in R$
R nicht antisymmetrisch	$\iff$	$\exists a, b \in M : (a, b) \in R$, $(b, a) \in R$ und $a \neq b$
R nicht total	$\iff$	$\exists a, b \in M : (a, b) \notin R$ und $(b, a) \notin R$
R nicht transitiv	$\iff$	$\exists a, b, c \in M : (a, b) \in R$, $(b, c) \in R$ und $(a, c) \notin R$

- Um zu zeigen, dass eine Eigenschaft gilt, muss man leider für alle Kombinationen ausprobieren, dass die Bedingung erfüllt ist.

Reflexivität

Intuitiv besagt die Reflexivität, dass jedes Element $a \in A$ mit sich selbst in Relation stehen muss. Die Aussage

$$(a, a) \in R$$

ist nur dann nicht erfüllt, wenn $(a, a) \notin R$ gilt, d.h. wenn mindestens ein Element nicht mit sich selbst in Relation steht.

Symmetrie

Intuitiv besagt die Symmetrie, dass zwei verschiedene Elemente entweder in beiden Richtungen oder gar nicht in Relation stehen dürfen.

- Falls $a = b$, ist die Implikation

$$(a, a) \in R \Longrightarrow (a, a) \in R$$

  immer erfüllt, egal ob $(a, a) \in R$ oder $(a, a) \notin R$ gilt.

- Falls $a \neq b$, ist die Implikation

$$(a, b) \in R \Longrightarrow (b, a) \in R$$

  nur dann nicht erfüllt, falls $(a, b) \in R$ und $(b, a) \notin R$ oder $(a, b) \notin R$ und $(b, a) \in R$ gilt, d.h. falls von den Tupeln (a, b) und (b, a) genau eins in R enthalten ist.

Asymmetrie

Intuitiv besagt die Asymmetrie, dass zwei verschiedene Elemente entweder in nur eine Richtung oder gar nicht in Relation stehen dürfen. Außerdem darf kein Element mit sich selbst in Relation stehen.

- Falls $a = b$, ist die Implikation

$$(a, a) \in R \Longrightarrow (a, a) \notin R$$

  nur dann nicht erfüllt, falls $(a, a) \in R$ gilt. Deshalb darf kein Element mit sich selbst in Relation stehen.

- Falls $a \neq b$, ist die Implikation

$$(a, b) \in R \Longrightarrow (b, a) \notin R$$

  nur dann nicht erfüllt, falls $(a, b) \in R$ und $(b, a) \in R$ gilt, d.h. falls beide Tupeln (a, b) und (b, a) in R enthalten sind.

Antisymmetrie

Intuitiv besagt die Antisymmetrie, dass zwei verschiedene Elemente entweder in nur eine Richtung oder gar nicht in Relation stehen dürfen. Im Gegensatz zur Asymmetrie dürfen Elemente schon mit sich selbst in Relation stehen. (Müssen sie aber nicht!)

- Falls $a = b$, ist die Implikation

$$((a, a) \in R \text{ und } (a, a) \in R) \Longrightarrow a = a$$

  immer erfüllt, da $a = a$ eine wahre Aussage ist. Deshalb dürfen Elemente mit sich selbst in Relation stehen oder auch nicht.

- Falls $a \neq b$, ist die Implikation

$$(a, b) \in R \Longrightarrow (b, a) \notin R$$

  nur dann nicht erfüllt, falls $(a, b) \in R$ und $(b, a) \in R$ gilt, d.h. falls beide Tupeln (a, b) und (b, a) in R enthalten sind.

Totalität

Intuitiv besagt die Totalität, dass zwei verschiedene Elemente in mindestens eine Richtung in Relation stehen sollen. Außerdem muss jedes Element mit sich selbst in Relation stehen.

- Falls $a = b$, ist die Implikation

$$(a, a) \notin R \Longrightarrow (a, a) \in R$$

  nur dann erfüllt, falls $(a, a) \in R$ gilt. Deshalb muss jedes Element mit sich selbst in Relation stehen.

- Falls $a \neq b$, ist die Implikation

$$(a, b) \notin R \Longrightarrow (b, a) \in R$$

  nur dann nicht erfüllt, falls $(a, b) \notin R$ und $(b, a) \notin R$ gilt, d.h. falls beide Tupeln (a, b) und (b, a) nicht in R enthalten sind.

Transitivität

Intuitiv besagt die Transitivität, dass es für jeden indirekten Weg zwischen zwei Knoten im Graph der Relation immer auch einen direkten Weg gibt.

- Falls a, b und c alle gleich sind, ist die Implikation

$$((a, a) \in R \text{ und } (a, a) \in R) \Longrightarrow (a, a) \in R$$

  immer erfüllt, egal ob $(a, a) \in R$ oder $(a, a) \notin R$ gilt.

- Falls nur a und b gleich sind, ist die Implikation

$$((a, a) \in R \text{ und } (a, c) \in R) \Longrightarrow (a, c) \in R$$

  auch immer erfüllt, egal ob $(a, c) \in R$ oder $(a, c) \notin R$ gilt.

- Falls nur b und c gleich sind, ist die Implikation

$$((a, b) \in R \text{ und } (b, b) \in R) \Longrightarrow (a, b) \in R$$

  auch immer erfüllt, egal ob $(a, b) \in R$ oder $(a, b) \notin R$ gilt.

- Falls nur a und c gleich sind, ist die Implikation

$$((a, b) \in R \text{ und } (b, a) \in R) \Longrightarrow (a, a) \in R$$

nur dann nicht erfüllt, wenn $(a, b) \in R$, $(b, a) \in R$ und $(a, a) \notin R$ gilt, d.h. wenn zwei Element in beiden Richtungen verbunden sind, aber eins davon nicht mit sich selbst.

- Falls a, b und c alle unterschiedlich sind, ist die Implikation

$$((a, b) \in R \text{ und } (b, c) \in R) \Longrightarrow (a, c) \in R$$

nur dann nicht erfüllt, falls $(a, b) \in R$, $(b, c) \in R$ und $(a, c) \notin R$, d.h. falls a mit b verbunden ist, b mit c, aber nicht a mit c.

Themenübersicht

Graphische Bedeutung der Eigenschaften

Es ist wichtig, dass man die Eigenschaften einer homogenen Relation R über A erkennen kann. Sehr hilfreich ist dabei zu wissen, was jede Eigenschaft für Elemente $a, b \in M$ erlaubt (✓) bzw. verbietet (✗). Aus den Überlegungen der letzten Folien entsteht folgende Tabelle:

An der linken Hälfte erkennt man, ob Elemente eine Kante zu sich selbst (eine *Schleife*) haben dürfen und an der rechten Seite, ob es erlaubt ist, dass zwischen je zwei verschiedenen Elementen keine, eine oder zwei Kanten verlaufen. Übrigens: „erlaubt sein“ heißt nicht, dass das notwendigerweise vorkommen muss!

Die Transitivität ist leider ein bisschen komplizierter.

Eine Relation ist genau dann transitiv, wenn man keine der folgenden zwei Situationen vorfindet:

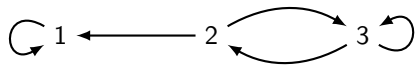
1. Es gibt bei zwei verschiedenen Elementen eine Doppelkante, aber es fehlt mindestens eine der beiden Schleifen (1. Punkt auf Folie 130):

2. Es gibt bei drei verschiedenen Elementen einen indirekten Weg von einem Element zu einem anderen, aber keinen direkten (2. Punkt auf Folie 130):

Findet man keine der beiden Situationen, so kann man mit Sicherheit sagen, dass die Relation transitiv ist!

Beispiel

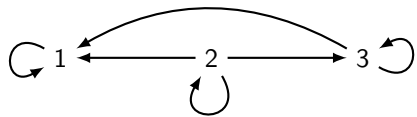
Sei R wieder folgende homogene Relation über [3]:



- R ist nicht reflexiv.
- R ist nicht symmetrisch.
- R ist nicht asymmetrisch.
- R ist nicht antisymmetrisch.
- R ist nicht total.
- R ist nicht transitiv.

Noch ein Beispiel

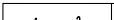
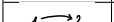
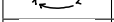
Sei R folgende homogene Relation über $[3]$:

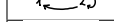
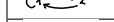


- R ist reflexiv.
- R ist nicht symmetrisch.
- R ist nicht asymmetrisch.
- R ist antisymmetrisch.
- R ist total.
- R ist transitiv.

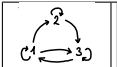
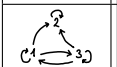
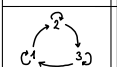
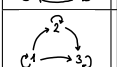
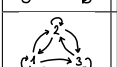
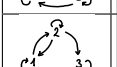
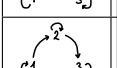
Ein letztes Beispiel

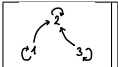
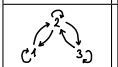
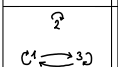
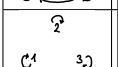
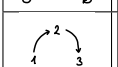
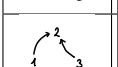
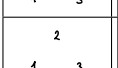
Es gibt $2^{2 \cdot 2} = 16$ verschiedene homogene Relationen über $[2]$:

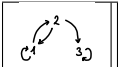
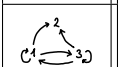
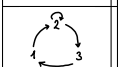
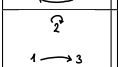
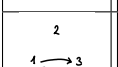
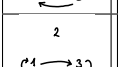
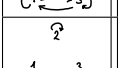
	ref	sym	asy	ant	tot	tra
	✗	✓	✓	✓	✗	✓
	✗	✓	✗	✓	✗	✓
	✗	✗	✓	✓	✗	✓
	✗	✗	✓	✓	✗	✓
	✗	✓	✗	✓	✗	✓
	✗	✗	✗	✓	✗	✓
	✗	✗	✗	✓	✗	✓
	✓	✓	✗	✓	✗	✓

	ref	sym	asy	ant	tot	tra
	✗	✓	✗	✗	✗	✗
	✗	✗	✗	✓	✗	✓
	✗	✗	✗	✓	✗	✓
	✗	✓	✗	✗	✗	✗
	✓	✗	✗	✓	✓	✓
	✓	✗	✗	✓	✓	✓
	✗	✓	✗	✗	✗	✗
	✓	✓	✗	✗	✓	✓

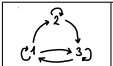
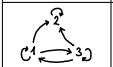
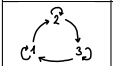
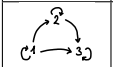
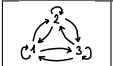
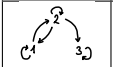
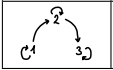
Welche Eigenschaften besitzen folgende homogene Relationen über [3]?

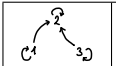
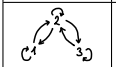
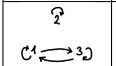
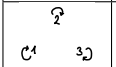
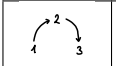
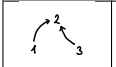
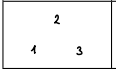
	ref	sym	asy	ant	tot	tra
						
						
						
						
						
						
						

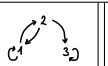
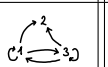
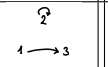
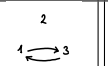
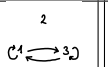
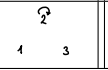
	ref	sym	asy	ant	tot	tra
						
						
						
						
						
						
						

	ref	sym	asy	ant	tot	tra
						
						
						
						
						
						
						

Antwort

	ref	sym	asy	ant	tot	tra
	✓	✗	✗	✗	✓	✗
	✓	✗	✗	✗	✓	✓
	✓	✗	✗	✓	✓	✗
	✓	✗	✗	✓	✓	✓
	✓	✓	✗	✗	✓	✓
	✓	✗	✗	✗	✗	✗
	✓	✗	✗	✓	✗	✗

	ref	sym	asy	ant	tot	tra
	✓	✗	✗	✓	✗	✓
	✓	✓	✗	✗	✗	✗
	✓	✓	✗	✗	✗	✓
	✓	✓	✗	✓	✗	✓
	✗	✗	✓	✓	✗	✗
	✗	✗	✓	✓	✗	✓
	✗	✓	✓	✓	✗	✓

	ref	sym	asy	ant	tot	tra
	✗	✗	✗	✗	✗	✗
	✗	✗	✗	✗	✗	✓
	✗	✗	✗	✓	✗	✗
	✗	✗	✗	✓	✗	✓
	✗	✓	✗	✗	✗	✗
	✗	✓	✗	✗	✗	✓
	✗	✓	✗	✓	✗	✓

Mehr Quizfragen

1. Welche Eigenschaften besitzen folgende homogene Relationen über den ganzen Zahlen?

	ref	sym	asy	ant	tot	tra
$=$						
$\neq$						
$\leq$						
$<$						

2. Welche Eigenschaften besitzen folgende homogene Relationen über der Potenzmenge einer beliebigen Menge?

	ref	sym	asy	ant	tot	tra
$=$						
$\neq$						
$\subseteq$						
$\not\subseteq$						
$\subset$						
$\not\subset$						

Antworten

1. Für $=$, $\neq$, $\leq$ und $<$ über den ganzen Zahlen gilt:

	ref	sym	asy	ant	tot	tra
$=$	✓	✓	✗	✓	✗	✓
$\neq$	✗	✓	✗	✗	✗	✗
$\leq$	✓	✗	✗	✓	✓	✓
$<$	✗	✗	✓	✓	✗	✓

2. Für $=$, $\neq$, $\subseteq$, $\not\subseteq$, $\subset$ und $\not\subset$ über der Potenzmenge einer beliebigen Menge gilt:

	ref	sym	asy	ant	tot	tra
$=$	✓	✓	✗	✓	✗	✓
$\neq$	✗	✓	✗	✗	✗	✗
$\subseteq$	✓	✗	✗	✓	✗	✓
$\not\subseteq$	✗	✗	✗	✗	✗	✗
$\subset$	✗	✗	✓	✓	✗	✓
$\not\subset$	✓	✗	✗	✗	✓	✗

Wichtige homogene Relationen

Für eine beliebige Menge A sind folgende homogene Relationen über A wichtig:

$$\begin{array}{lcll} \emptyset & := & \{\} & (\text{leere Relation}) \\ \mathrm{id}_A & := & \{(a,a) \mid a \in A\} & (\text{Identitätsrelation}) \\ A \times A & := & \{(a,b) \mid a,b \in A\} & (\text{kartesisches Produkt}) \end{array}$$

Infos

- In $\emptyset$ steht jedes Element mit keinem Element in Relation.
- In id_A steht jedes Element nur mit sich selbst in Relation. Beispielsweise ist die Gleichheitsrelation $=$ über ganze Zahlen nichts anderes als $\mathrm{id}_{\mathbb{Z}}$.
- In $A \times A$ steht jedes Element mit jedem anderen in Relation.

Quizfrage

Welche Eigenschaften besitzen folgende homogene Relationen über einer beliebigen, nichtleeren Menge A?

	ref	sym	asy	ant	tot	tra
$\emptyset$						
id_A						
$A \times A$						

Antworten

Es gilt:

	ref	sym	asy	ant	tot	tra
$\emptyset$	✗	✓	✓	✓	✗	✓
id_A	✓	✓	✗	✓	✗	✓
$A \times A$	✓	✓	✗	✗	✓	✓

Quizfragen

1. Kann eine reflexive Relation auch asymmetrisch sein?
2. Ist jede antisymmetrische Relation, die nicht reflexiv ist, automatisch asymmetrisch?
3. Ist jede asymmetrische Relation automatisch antisymmetrisch?
4. Kann eine symmetrische Relation auch asymmetrisch sein?
5. Ist jede totale Relation automatisch reflexiv?

Antworten

1. Ja! Die leere Relation $\emptyset$ über der leeren Menge $\emptyset$. Diese besitzt alle 6 Eigenschaften ;-)
2. Nein! Damit eine antisymmetrische Relation auch asymmetrisch ist, darf kein Element zu sich selbst in Relation stehen. Stehen jedoch einige mit sich selbst in Relation und einige nicht, dann ist die Relation weder reflexiv noch asymmetrisch. Gegenbeispiel: $R = \{(1,1),(1,2)\}$ über $[2]$.
3. Ja! Man erkennt an der Tabelle auf Folie 132, dass die Antisymmetrie eine Abschwächung der Asymmetrie ist.
4. Ja! Die leere Relation $\emptyset$.
5. Ja! Man erkennt an der Tabelle auf Folie 132, dass die Reflexivität eine Abschwächung der Totalität ist.

Infos

- Die leere Relation $\emptyset$ über einer beliebigen Menge A ist symmetrisch, asymmetrisch, antisymmetrisch und transitiv. Gilt außerdem $A = \emptyset$, so ist sie auch reflexiv und total!
- Für jede Relation R über einer beliebigen Menge A gilt:

$$\begin{array}{lcl} R \text{ total} & \Longrightarrow & R \text{ reflexiv} \\ R \text{ asymmetrisch} & \Longrightarrow & R \text{ antisymmetrisch} \end{array}$$

  Das sind auch die einzigen Implikationen, die immer gelten.
- Eine Relation über einer nichtleeren Menge kann nicht gleichzeitig reflexiv und asymmetrisch sein.
- Eine nichtleere Relation über einer nichtleeren Menge kann nicht gleichzeitig symmetrisch und asymmetrisch sein.

Themenübersicht

Eigenschaften homogener Relationen beweisen

Die Definitionen aller Eigenschaften homogener Relationen sind Aussagen der Art

$$\forall \ldots : B \Longrightarrow F$$

für eine Bedingung B und eine Folgerung F. Die Negation einer solchen Aussage hat folgende Form:

$$\exists \ldots : B \text{ und nicht } F.$$

Daher werden diese Aussagen

- mit einem Beweis für beliebige Elemente gezeigt, aber
- mit einem konkreten Gegenbeispiel widerlegt.

Wie man diese 6 Eigenschaften beweist oder widerlegt wird anhand der nächsten 6 Relationen gezeigt.

Info

Bei der Reflexivität gibt es keine Bedingung. Die Aussage ist lediglich

$$\forall a \in A : (a, a) \in R$$

und ihre Negation

$$\exists a \in A : (a, a) \notin R.$$

Teilbarkeitsrelation $\mid$

Für beliebige ganze Zahlen $x, y \in \mathbb{Z}$ gilt $x \mid y$ genau dann, wenn es eine natürliche Zahl $k \in \mathbb{Z}$ gibt mit $y = kx$. In kompakter Schreibweise heißt das:

$$x \mid y \quad :\Longleftrightarrow \quad \exists k \in \mathbb{Z} : y = k \cdot x \ .$$

Somit ist $\mid$ eine homogene Relation über $\mathbb{Z}$.

Beispiele

Es gilt beispielsweise $3 \mid -12$, $4 \mid 12$ und $-6 \mid 12$, aber $5 \nmid 12$, $-7 \nmid 12$ und $8 \nmid 12$.

Infos

- Für $x \mid y$ sagen wir „x teilt y“, „y wird von x geteilt“ oder „y ist ein Vielfaches von x“.
- Für alle $n \in \mathbb{Z}$ gilt: $1 \mid n$ und $n \mid 0$.

Eigenschaften der Teilbarkeitsrelation

Für die Teilbarkeitsrelation $|$ gilt:

1. $|$ ist reflexiv.
2. $|$ ist nicht symmetrisch.
3. $|$ ist nicht asymmetrisch.
4. $|$ ist antisymmetrisch.
5. $|$ ist nicht total.
6. $|$ ist transitiv.

Diese Aussagen werden in den nächsten 6 Folien gezeigt.

1. $|$ ist reflexiv.

   Zu zeigen ist:

   $$\forall a \in \mathbb{Z} : a \mid a.$$

   Beweis:

   Sei $a \in \mathbb{Z}$ eine beliebige ganze Zahl.
   $\Longrightarrow$ $a = 1 \cdot a$.
   $\Longrightarrow$ Es gibt also eine ganze Zahl $k \in \mathbb{Z}$ mit $a = k \cdot a$, nämlich $k = 1$.
   $\Longrightarrow$ $a \mid a$.

   $\square$.

2. $|$ ist nicht symmetrisch.

Zu zeigen ist:

$$\exists a, b \in \mathbb{Z} : a \mid b \text{ und } b \nmid a.$$

Beweis:

Als Gegenbeispiel sind zwei ganze Zahlen $a, b \in \mathbb{Z}$ gesucht, für die $a \mid b$ und $b \nmid a$ gelten, z.B. $a = 2$ und $b = 4$. $\square$

3. $|$ ist nicht asymmetrisch.

Zu zeigen ist:

$$\exists a, b \in \mathbb{Z} : a \mid b \text{ und } b \mid a.$$

Beweis:

Als Gegenbeispiel sind zwei ganze Zahlen $a, b \in \mathbb{Z}$ gesucht, für die $a \mid b$ und $b \mid a$ gelten, z.B. $a = 4$ und $b = 4$. □

4. $|$ ist nicht antisymmetrisch.

Zu zeigen ist:

$$\exists a, b \in \mathbb{Z} : a \mid b,\ b \mid a \text{ und } a \neq b.$$

Beweis:

Als Gegenbeispiel sind zwei ganze Zahlen $a, b \in \mathbb{Z}$ gesucht, für die $a \mid b$, $b \mid a$ und $a \neq b$ gelten, z.B. $a = 3$ und $b = -3$. □

Info: Die Einschränkung der Teilbarkeitsrelation auf $\mathbb{N}_0$ ist schon antisymmetrisch!

5. $|$ ist nicht total.

Zu zeigen ist:

$$\exists a, b \in \mathbb{Z} : a \nmid b \text{ und } b \nmid a.$$

Beweis:

Als Gegenbeispiel sind zwei ganze Zahlen $a, b \in \mathbb{Z}$ gesucht, für die $a \nmid b$ und $b \nmid a$ gelten, z.B. $a = 3$ und $b = 4$. $\square$

6. $|$ ist transitiv.

Zu zeigen ist:

$$\forall a, b, c \in \mathbb{Z} : (a \mid b \text{ und } b \mid c) \Longrightarrow a \mid c.$$

Beweis:

Seien $a, b, c \in \mathbb{Z}$ beliebige ganze Zahlen mit $a \mid b$ und $b \mid c$.
$\Longrightarrow$ Es gibt ganze Zahlen $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ mit $b = k_1 \cdot a$ und $c = k_2 \cdot b$.
$\Longrightarrow$ Durch Einsetzen von $b = k_1 a$ in $c = k_2 b$ erhalten wir:

$$c = k_2 \cdot k_1 \cdot a.$$

$\Longrightarrow$ Es gibt also eine ganze Zahl $k_3 \in \mathbb{Z}$ mit $c = k_3 a$, nämlich $k_3 = k_2 \cdot k_1$.
$\Longrightarrow$ $a \mid c$

□

Kongruenzrelation $\equiv_n$ modulo n

Sei $n \in \mathbb{N}$. Für beliebige ganze Zahlen $x, y \in \mathbb{Z}$ gilt $x \equiv_n y$ genau dann, wenn es eine ganze Zahl $k \in \mathbb{Z}$ gibt mit $x = y + kn$. In kompakter Schreibweise heißt das:

$$x \equiv_n y \quad :\Longleftrightarrow \quad \exists k \in \mathbb{Z} : x = y + k \cdot n \ .$$

Somit ist $\equiv_n$ ebenfalls eine homogene Relation über $\mathbb{Z}$.

Beispiele

Für $n = 5$ gilt beispielsweise $3 \equiv_5 8$, $6 \equiv_5 -9$ und $-2 \equiv_5 -17$, aber $-3 \not\equiv_5 6$, $13 \not\equiv_5 6$ und $8 \not\equiv_5 -10$.

Infos

- Für $x \equiv_n y$ sagen wir „x und y sind kongruent modulo n“.
- Es gilt $x \equiv_n y$ genau dann, wenn die Differenz $x - y$ durch n teilbar ist:

$$x \equiv_n y \Longleftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : x = y + k \cdot n \Longleftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : x - y = k \cdot n \Longleftrightarrow n \mid (x - y)$$

Eigenschaften der Kongruenzrelation modulo n

Für die Kongruenzrelation $\equiv_n$ modulo n gilt:

1. $\equiv_n$ ist reflexiv.
2. $\equiv_n$ ist symmetrisch.
3. $\equiv_n$ ist nicht asymmetrisch.
4. $\equiv_n$ ist nicht antisymmetrisch.
5. $\equiv_n$ ist nicht total.
6. $\equiv_n$ ist transitiv.

Diese Aussagen werden in den nächsten 6 Folien gezeigt.

1. $\equiv_n$ ist reflexiv.

   Zu zeigen ist:

   $$\forall a \in \mathbb{Z} : a \equiv_n a.$$

   Beweis:

   Sei $a \in \mathbb{Z}$ eine beliebige ganze Zahl.
   $\Longrightarrow$ $a = a + 0 \cdot n$.
   $\Longrightarrow$ Es gibt also eine ganze Zahl $k \in \mathbb{Z}$ mit $a = a + k \cdot n$, nämlich $k = 0$.
   $\Longrightarrow$ $a \equiv_n a$.

   $\square$.

2. $\equiv_n$ ist symmetrisch.

Zu zeigen ist:

$$\forall a, b \in \mathbb{Z} : a \equiv_n b \Longrightarrow b \equiv_n a.$$

Beweis:

Seien $a, b \in \mathbb{Z}$ beliebige ganze Zahlen mit $a \equiv_n b$.
$\Longrightarrow$ Es gibt ein $k_1 \in \mathbb{Z}$ mit $a = b + k_1 \cdot n$.
$\Longrightarrow$ $a - k_1 \cdot n = b$.
$\Longrightarrow$ Es gibt also ein $k_2 \in \mathbb{Z}$ mit $b = a + k_2 \cdot n$, nämlich $k_2 = -k_1$.
$\Longrightarrow$ $b \equiv_n a$.

$\square$.

3. $\equiv_n$ ist nicht asymmetrisch.

   Zu zeigen ist:

   $$\exists a, b \in \mathbb{Z} : a \equiv_n b \text{ und } b \equiv_n a.$$

   Beweis:

   Als Gegenbeispiel sind zwei ganze Zahlen $a, b \in \mathbb{Z}$ gesucht, für die $a \equiv_n b$ und $b \equiv_n a$ gelten, z.B. $n = 5$, $a = 1$ und $b = 6$. □

4. $\equiv_n$ ist nicht antisymmetrisch.

   Zu zeigen ist:

   $$\exists a, b \in \mathbb{Z} : a \equiv_n b, b \equiv_n a \text{ und } a \neq b.$$

   Beweis:

   Als Gegenbeispiel sind zwei ganze Zahlen $a, b \in \mathbb{Z}$ gesucht, für die $a \equiv_n b$, $b \equiv_n a$ und $a \neq b$ gelten, z.B. wieder $n = 5$, $a = 1$ und $b = 6$. □

5. $\equiv_n$ ist nicht total.

   Zu zeigen ist:

   $$\exists a, b \in \mathbb{Z} : a \not\equiv_n b \text{ und } b \not\equiv_n a.$$

   Beweis:

   Als Gegenbeispiel sind zwei ganze Zahlen $a, b \in \mathbb{Z}$ gesucht, für die $a \not\equiv_n b$ und $b \not\equiv_n a$ gelten, z.B. $n = 5$, $a = 2$ und $b = 3$. □

6. $\equiv_n$ ist transitiv.

Zu zeigen ist:

$$\forall a, b, c \in \mathbb{Z} : (a \equiv_n b \text{ und } b \equiv_n c) \Longrightarrow a \equiv_n c.$$

Beweis:

Seien $a, b, c \in \mathbb{Z}$ beliebige ganze Zahlen mit $a \equiv_n b$ und $b \equiv_n c$.
$\Longrightarrow$ Es gibt ganze Zahlen $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ mit $a = b + k_1 \cdot n$ und $b = c + k_2 \cdot n$.
$\Longrightarrow$ Durch Einsetzen von $b = c + k_2 \cdot n$ in $a = b + k_1 \cdot n$ erhalten wir:

$$a = c + k_2 \cdot n + k_1 \cdot n = c + (k_2 + k_1) \cdot n.$$

$\Longrightarrow$ Es gibt also eine ganze Zahl $k_3 \in \mathbb{Z}$ mit $a = c + k_3 \cdot n$, nämlich $k_3 = k_2 + k_1$.
$\Longrightarrow$ $a \equiv_n c$

□

Präfixrelation $\sqsubseteq_p$

Sei Σ ein Alphabet und Σ^* die Menge aller Wörter über Σ. Für beliebige Wörter $u, v \in \Sigma^*$ gilt $u \sqsubseteq_p v$ genau dann, wenn es ein Wort $w \in \Sigma^*$ gibt mit $v = uw$. In kompakter Schreibweise heißt das:

$$u \sqsubseteq_p v \quad :\Longleftrightarrow \quad \exists w \in \Sigma^* : v = uw \ .$$

Somit ist $\sqsubseteq_p$ ebenfalls eine homogene Relation über Σ^*.

Beispiele

Für $\Sigma = \{a, b, c\}$ gilt beispielsweise $ab \sqsubseteq_p abaca$, $\epsilon \sqsubseteq_p abc$ und $bc \sqsubseteq_p bc$, aber $ca \not\sqsubseteq_p abcaa$, $abba \not\sqsubseteq_p ab$ und $abc \not\sqsubseteq_p bca$.

Infos

- Für $u \sqsubseteq_p v$ sagen wir „u ist Präfix von v“.
- Intuitiv heißt $u \sqsubseteq_p v$, dass das Wort u am Anfang von v vorkommt.

Eigenschaften der Präfixrelation

Für die Präfixrelation $\sqsubseteq_p$ gilt:

1. $\sqsubseteq_p$ ist reflexiv.
2. $\sqsubseteq_p$ ist nicht symmetrisch.
3. $\sqsubseteq_p$ ist nicht asymmetrisch.
4. $\sqsubseteq_p$ ist antisymmetrisch.
5. $\sqsubseteq_p$ ist nicht total.
6. $\sqsubseteq_p$ ist transitiv.

Diese Aussagen werden in den nächsten 6 Folien gezeigt.

1. $\sqsubseteq_p$ ist reflexiv.

   Zu zeigen ist:

   $$\forall a \in \Sigma^* : a \sqsubseteq_p a.$$

   Beweis:

   Sei $a \in \Sigma^*$ ein beliebiges Wort.
   $\Longrightarrow$ $a = a\epsilon$.
   $\Longrightarrow$ Es gibt also ein Wort $w \in \Sigma^*$ mit $a = aw$, nämlich $w = \epsilon$.
   $\Longrightarrow$ $a \sqsubseteq_p a$.

   $\square$.

2. $\sqsubseteq_p$ ist nicht symmetrisch.

Zu zeigen ist:

$$\exists a, b \in \Sigma^* : a \sqsubseteq_p b \text{ und } b \not\sqsubseteq_p a.$$

Beweis:

Als Gegenbeispiel sind zwei Wörter $a, b \in \Sigma^*$ gesucht, für die $a \sqsubseteq_p b$ und $b \not\sqsubseteq_p a$ gelten, z.B. $\Sigma = \{x, y\}$, $a = x$ und $b = xy$. □

3. $\sqsubseteq_p$ ist nicht asymmetrisch.

   Zu zeigen ist:

   $$\exists a, b \in \Sigma^* : a \sqsubseteq_p b \text{ und } b \sqsubseteq_p a.$$

   Beweis:

   Als Gegenbeispiel sind zwei Wörter $a, b \in \Sigma^*$ gesucht, für die $a \sqsubseteq_p b$ und $b \sqsubseteq_p a$ gelten, z.B. $\Sigma = \{x, y\}$, $a = xy$ und $b = xy$. □

4. $\sqsubseteq_p$ ist antisymmetrisch.

Zu zeigen ist:

$$\forall a, b \in \Sigma^* : (a \sqsubseteq_p b \text{ und } b \sqsubseteq_p a) \Longrightarrow a = b.$$

Beweis:

Seien $a, b \in \Sigma^*$ beliebige Wörter mit $a \sqsubseteq_p b$ und $b \sqsubseteq_p a$.
$\Longrightarrow$ Es gibt Wörter $w_1, w_2 \in \Sigma^*$ mit $b = aw_1$ und $a = bw_2$.
$\Longrightarrow$ Durch Einsetzen von $b = aw_1$ in $a = bw_2$ erhalten wir:

$$a = aw_1w_2.$$

$\Longrightarrow$ w_1 und w_2 müssen beide leer sein.
$\Longrightarrow$ $b = a\epsilon$ und $a = b\epsilon$.
$\Longrightarrow$ $a = b$.

□

5. $\sqsubseteq_p$ ist nicht total.

   Zu zeigen ist:

   $$\exists a, b \in \Sigma^* : a \not\sqsubseteq_p b \text{ und } b \not\sqsubseteq_p a.$$

   Beweis:

   Als Gegenbeispiel sind zwei Wörter $a, b \in \Sigma^*$ gesucht, für die $a \not\sqsubseteq_p b$ und $b \not\sqsubseteq_p a$ gelten, z.B. $\Sigma = \{x, y\}$, $a = xy$ und $b = yx$. □

6. $\sqsubseteq_p$ ist transitiv.

Zu zeigen ist:

$$\forall a, b, c \in \Sigma^* : (a \sqsubseteq_p b \text{ und } b \sqsubseteq_p c) \Longrightarrow a \sqsubseteq_p c.$$

Beweis:

Seien $a, b, c \in \Sigma^*$ beliebige Wörter mit $a \sqsubseteq_p b$ und $b \sqsubseteq_p c$.
$\Longrightarrow$ Es gibt Wörter $w_1, w_2 \in \Sigma^*$ mit $b = aw_1$ und $c = bw_2$.
$\Longrightarrow$ Durch Einsetzen von $b = aw_1$ in $c = bw_2$ erhalten wir:

$$c = aw_1w_2.$$

$\Longrightarrow$ Also gibt es ein Wort $w_3 \in \Sigma^*$ mit $c = aw_3$ (nämlich $w_3 = w_1w_2$).
$\Longrightarrow$ $a \sqsubseteq_p c$

□

Suffixrelation $\sqsubseteq_s$

Sei Σ ein Alphabet und Σ^* die Menge aller Wörter über Σ. Für beliebige Wörter $u, v \in \Sigma^*$ gilt $u \sqsubseteq_s v$ genau dann, wenn es ein Wort $w \in \Sigma^*$ gibt mit $v = wu$. In kompakter Schreibweise heißt das:

$$u \sqsubseteq_s v \quad :\Longleftrightarrow \quad \exists w \in \Sigma^* : v = wu \ .$$

Somit ist auch $\sqsubseteq_s$ eine homogene Relation über Σ^*.

Beispiele

Für $\Sigma = \{a, b, c\}$ gilt beispielsweise $ab \sqsubseteq_s acab$, $\epsilon \sqsubseteq_s acb$ und $bab \sqsubseteq_s bab$, aber $ca \not\sqsubseteq_s cabaa$, $abcc \not\sqsubseteq_s cc$ und $bca \not\sqsubseteq_s bac$.

Infos

- Für $u \sqsubseteq_s v$ sagen wir „u ist Suffix von v“.
- Intuitiv heißt $u \sqsubseteq_s v$, dass das Wort u am Ende von v vorkommt.

Eigenschaften der Suffixrelation

Für die Suffixrelation $\sqsubseteq_s$ gilt:

1. $\sqsubseteq_s$ ist reflexiv.
2. $\sqsubseteq_s$ ist nicht symmetrisch.
3. $\sqsubseteq_s$ ist nicht asymmetrisch.
4. $\sqsubseteq_s$ ist antisymmetrisch.
5. $\sqsubseteq_s$ ist nicht total.
6. $\sqsubseteq_s$ ist transitiv.

Diese Aussagen werden in den nächsten 6 Folien gezeigt.

1. $\sqsubseteq_s$ ist reflexiv.

   Zu zeigen ist:

   $$\forall a \in \Sigma^* : a \sqsubseteq_s a.$$

   Beweis:

   Sei $a \in \Sigma^*$ ein beliebiges Wort.
   $\Longrightarrow$ $a = \epsilon a$.
   $\Longrightarrow$ Es gibt also ein Wort $w \in \Sigma^*$ mit $a = wa$, nämlich $w = \epsilon$.
   $\Longrightarrow$ $a \sqsubseteq_s a$.

   $\square$.

2. $\sqsubseteq_s$ ist nicht symmetrisch.

Zu zeigen ist:

$$\exists a, b \in \Sigma^* : a \sqsubseteq_s b \text{ und } b \not\sqsubseteq_s a.$$

Beweis:

Als Gegenbeispiel sind zwei Wörter $a, b \in \Sigma^*$ gesucht, für die $a \sqsubseteq_s b$ und $b \not\sqsubseteq_s a$ gelten, z.B. $\Sigma = \{x, y\}$, $a = y$ und $b = xy$. □

3. $\sqsubseteq_s$ ist nicht asymmetrisch.

   Zu zeigen ist:

   $$\exists a, b \in \Sigma^* : a \sqsubseteq_s b \text{ und } b \sqsubseteq_s a.$$

   Beweis:

   Als Gegenbeispiel sind zwei Wörter $a, b \in \Sigma^*$ gesucht, für die $a \sqsubseteq_s b$ und $b \sqsubseteq_s a$ gelten, z.B. $\Sigma = \{x, y\}$, $a = xy$ und $b = xy$. □

4. $\sqsubseteq_s$ ist antisymmetrisch.

Zu zeigen ist:

$$\forall a, b \in \Sigma^* : (a \sqsubseteq_s b \text{ und } b \sqsubseteq_s a) \Longrightarrow a = b.$$

Beweis:

Seien $a, b \in \Sigma^*$ beliebige Wörter mit $a \sqsubseteq_s b$ und $b \sqsubseteq_s a$.
$\Longrightarrow$ Es gibt Wörter $w_1, w_2 \in \Sigma^*$ mit $b = w_1 a$ und $a = w_2 b$.
$\Longrightarrow$ Durch Einsetzen von $b = w_1 a$ in $a = w_2 b$ erhalten wir:

$$a = w_2 w_1 a.$$

$\Longrightarrow$ w_1 und w_2 müssen beide leer sein.
$\Longrightarrow$ $b = \epsilon a$ und $a = \epsilon b$.
$\Longrightarrow$ $a = b$.

□

5. $\sqsubseteq_s$ ist nicht total.

   Zu zeigen ist:

   $$\exists a, b \in \Sigma^* : a \not\sqsubseteq_s b \text{ und } b \not\sqsubseteq_s a.$$

   Beweis:

   Als Gegenbeispiel sind zwei Wörter $a, b \in \Sigma^*$ gesucht, für die $a \not\sqsubseteq_s b$ und $b \not\sqsubseteq_s a$ gelten, z.B. $\Sigma = \{x, y\}$, $a = xy$ und $b = yx$. □

6. $\sqsubseteq_s$ ist transitiv.

Zu zeigen ist:

$$\forall a, b, c \in \Sigma^* : (a \sqsubseteq_s b \text{ und } b \sqsubseteq_s c) \Longrightarrow a \sqsubseteq_s c.$$

Beweis:

Seien $a, b, c \in \Sigma^*$ beliebige Wörter mit $a \sqsubseteq_s b$ und $b \sqsubseteq_s c$.
$\Longrightarrow$ Es gibt Wörter $w_1, w_2 \in \Sigma^*$ mit $b = w_1 a$ und $c = w_2 b$.
$\Longrightarrow$ Durch Einsetzen von $b = w_1 a$ in $c = w_2 b$ erhalten wir:

$$c = w_2 w_1 a.$$

$\Longrightarrow$ Also gibt es ein Wort $w_3 \in \Sigma^*$ mit $c = w_3 a$ (nämlich $w_3 = w_2 w_1$).
$\Longrightarrow$ $a \sqsubseteq_s c$

□

Teilwortrelation $\sqsubseteq$

Sei Σ ein Alphabet und Σ^* die Menge aller Wörter über Σ. Für beliebige Wörter $u, v \in \Sigma^*$ gilt $u \sqsubseteq v$ genau dann, wenn es Wörter $w_1, w_2 \in \Sigma^*$ gibt mit $v = w_1 u w_2$. In kompakter Schreibweise heißt das:

$$u \sqsubseteq v \quad :\Longleftrightarrow \quad \exists w_1, w_2 \in \Sigma^* : v = w_1 u w_2 \ .$$

Somit ist $\sqsubseteq$ eine homogene Relation über Σ^*.

Beispiele

Für $\Sigma = \{a, b, c\}$ gilt beispielsweise $ab \sqsubseteq acabca$, $\epsilon \sqsubseteq acc$ und $baa \sqsubseteq baa$, aber $ca \not\sqsubseteq acba$, $cbac \not\sqsubseteq ab$ und $acbc \not\sqsubseteq bcac$.

Infos

- Für $u \sqsubseteq v$ sagen wir „u ist Teilwort von v“.
- Intuitiv heißt $u \sqsubseteq v$, dass das Wort u irgendwo in v vorkommt.

Eigenschaften der Teilwortrelation

Für die Teilwortrelation $\sqsubseteq$ gilt:

1. $\sqsubseteq$ ist reflexiv.
2. $\sqsubseteq$ ist nicht symmetrisch.
3. $\sqsubseteq$ ist nicht asymmetrisch.
4. $\sqsubseteq$ ist antisymmetrisch.
5. $\sqsubseteq$ ist nicht total.
6. $\sqsubseteq$ ist transitiv.

1. $\sqsubseteq$ ist reflexiv.

   Zu zeigen ist:

   $$\forall a \in \Sigma^* : a \sqsubseteq a.$$

   Beweis:

   Sei $a \in \Sigma^*$ ein beliebiges Wort.
   $\Longrightarrow$ $a = \epsilon a \epsilon$.
   $\Longrightarrow$ Es gibt also Wörter $w_1, w_2 \in \Sigma^*$ mit $a = w_1 a w_2$, nämlich $w_1 = \epsilon$ und $w_2 = \epsilon$.
   $\Longrightarrow$ $a \sqsubseteq a$.

   $\square$.

2. $\sqsubseteq$ ist nicht symmetrisch.

   Zu zeigen ist:

   $$\exists a, b \in \Sigma^* : a \sqsubseteq b \text{ und } b \not\sqsubseteq a.$$

   Beweis:

   Als Gegenbeispiel sind zwei Wörter $a, b \in \Sigma^*$ gesucht, für die $a \sqsubseteq b$ und $b \not\sqsubseteq a$ gelten, z.B. $\Sigma = \{x, y\}$, $a = xy$ und $b = xxyy$. $\square$

3. $\sqsubseteq$ ist nicht asymmetrisch.

   Zu zeigen ist:

   $$\exists a, b \in \Sigma^* : a \sqsubseteq b \text{ und } b \sqsubseteq a.$$

   Beweis:

   Als Gegenbeispiel sind zwei Wörter $a, b \in \Sigma^*$ gesucht, für die $a \sqsubseteq b$ und $b \sqsubseteq a$ gelten, z.B. $\Sigma = \{x, y\}$, $a = xy$ und $b = xy$. $\square$

4. $\sqsubseteq$ ist antisymmetrisch.

Zu zeigen ist:

$$\forall a, b \in \Sigma^* : (a \sqsubseteq b \text{ und } b \sqsubseteq a) \Longrightarrow a = b.$$

Beweis:

Seien $a, b \in \Sigma^*$ beliebige Wörter mit $a \sqsubseteq b$ und $b \sqsubseteq a$.
$\Longrightarrow$ Es gibt Wörter $w_1, w_2, w_3, w_4 \in \Sigma^*$ mit $b = w_1 a w_2$ und $a = w_3 b w_4$.
$\Longrightarrow$ Durch Einsetzen von $b = w_1 a w_2$ in $a = w_3 b w_4$ erhalten wir:

$$a = w_3 w_1 a w_2 w_4.$$

$\Longrightarrow$ w_1, w_2, w_3 und w_4 müssen alle leer sein.
$\Longrightarrow$ $b = \epsilon a \epsilon$ und $a = \epsilon b \epsilon$.
$\Longrightarrow$ $a = b$.

□

5. $\sqsubseteq$ ist nicht total.

   Zu zeigen ist:

   $$\exists a, b \in \Sigma^* : a \not\sqsubseteq b \text{ und } b \not\sqsubseteq a.$$

   Beweis:

   Als Gegenbeispiel sind zwei Wörter $a, b \in \Sigma^*$ gesucht, für die $a \not\sqsubseteq b$ und $b \not\sqsubseteq a$ gelten, z.B. $\Sigma = \{x, y\}$, $a = xy$ und $b = yx$. $\square$

6. $\sqsubseteq$ ist transitiv.

Zu zeigen ist:

$$\forall a, b, c \in \Sigma^* : (a \sqsubseteq b \text{ und } b \sqsubseteq c) \Longrightarrow a \sqsubseteq c.$$

Beweis:

Seien $a, b, c \in \Sigma^*$ beliebige Wörter mit $a \sqsubseteq b$ und $b \sqsubseteq c$.
$\Longrightarrow$ Es gibt Wörter $w_1, w_2, w_3, w_4 \in \Sigma^*$ mit $b = w_1 a w_2$ und $c = w_3 b w_4$.
$\Longrightarrow$ Durch Einsetzen von $b = w_1 a w_2$ in $c = w_3 b w_4$ erhalten wir:

$$c = w_3 w_1 a w_2 w_4.$$

$\Longrightarrow$ Also gibt es Wörter $w_5, w_6 \in \Sigma^*$ mit $c = w_5 a w_6$ (nämlich $w_5 = w_3 w_1$ und $w_6 = w_2 w_4$).
$\Longrightarrow$ $a \sqsubseteq c$

□

Wortlängenrelation $\parallel$

Sei Σ ein Alphabet und Σ^* die Menge aller Wörter über Σ. Für beliebige Wörter $u, v \in \Sigma^*$ gilt $u \parallel v$ genau dann, wenn u und v dieselbe Länge haben. In kompakter Schreibweise heißt das:

$$u \parallel v \quad :\Longleftrightarrow \quad |u| = |v| \ .$$

Auch $\parallel$ ist also eine homogene Relation über Σ^*.

Beispiele

Für $\Sigma = \{a, b, c\}$ gilt beispielsweise $ab \parallel bc$, $b \parallel c$ und $abc \parallel bcc$, aber $ab \nparallel bac$, $cb \nparallel c$ und $ac \nparallel bcac$.

Infos

Für $u \parallel v$ sagen wir „u und v sind gleich lang“.

Eigenschaften der Wortlängenrelation

Für die Wortlängenrelation $\|$ gilt:

1. $\|$ ist reflexiv.
2. $\|$ ist symmetrisch.
3. $\|$ ist nicht asymmetrisch.
4. $\|$ ist nicht antisymmetrisch.
5. $\|$ ist nicht total.
6. $\|$ ist transitiv.

Diese Aussagen werden in den nächsten 6 Folien gezeigt.

1. $\parallel$ ist reflexiv.

   Zu zeigen ist:

   $$\forall a \in \Sigma^* : a \parallel a.$$

   Beweis:

   Sei $a \in \Sigma^*$ ein beliebiges Wort.
   $\Longrightarrow$ $|a| = |a|$.
   $\Longrightarrow$ $a \parallel a$.

   $\square$

2. $\parallel$ ist symmetrisch.

Zu zeigen ist:

$$\forall a, b \in \Sigma^* : a \parallel b \Longrightarrow b \parallel a.$$

Beweis:

Seien $a, b \in \Sigma^*$ beliebige Wörter mit $a \parallel b$.
$\Longrightarrow$ $|a| = |b|$.
$\Longrightarrow$ $|b| = |a|$.
$\Longrightarrow$ $b \parallel a$.

□

3. $\|$ ist nicht asymmetrisch.

   Zu zeigen ist:

   $$\exists a, b \in \Sigma^* : a \parallel b \text{ und } b \parallel a.$$

   Beweis:

   Als Gegenbeispiel sind zwei Wörter $a, b \in \Sigma^*$ gesucht, für die $a \parallel b$ und $b \parallel a$ gelten, z.B. $\Sigma = \{x, y\}$, $a = xy$ und $b = xy$. □

4. $\|$ ist nicht antisymmetrisch.

   Zu zeigen ist:

   $$\exists a, b \in \Sigma^* : a \parallel b, b \parallel a \text{ und } a \neq b.$$

   Beweis:

   Als Gegenbeispiel sind zwei Wörter $a, b \in \Sigma^*$ gesucht, für die $a \parallel b$, $b \parallel a$ und $a \neq b$ gelten, z.B. $\Sigma = \{x, y\}$, $a = xx$ und $b = yy$. □

5. $\parallel$ ist nicht total.

   Zu zeigen ist:

   $$\exists a, b \in \Sigma^* : a \nparallel b \text{ und } b \nparallel a.$$

   Beweis:

   Als Gegenbeispiel sind zwei Wörter $a, b \in \Sigma^*$ gesucht, für die $a \nparallel b$ und $b \nparallel a$ gelten, z.B. $\Sigma = \{x, y\}$, $a = x$ und $b = yyy$. $\square$

6. $\parallel$ ist transitiv.

Zu zeigen ist:

$$\forall a, b, c \in \Sigma^* : (a \parallel b \text{ und } b \parallel c) \Longrightarrow a \parallel c.$$

Beweis:

Seien $a, b, c \in \Sigma^*$ beliebige Wörter mit $a \parallel b$ und $b \parallel c$.
$\Longrightarrow$ $|a| = |b|$ und $|b| = |c|$.
$\Longrightarrow$ $|a| = |b| = |c|$.
$\Longrightarrow$ $|a| = |c|$.
$\Longrightarrow$ $a \parallel c$.

□

Tipp

Wenn man selber entscheiden muss, ob eine Eigenschaft gilt oder nicht, dann sollte man sich die Relation (bzw. einen Teil davon) graphisch vorstellen und die Tricks auf Folien 132 und 133 benutzen.

Quizfragen

Sei $\bowtie$ eine homogene Relation über Zahlenpaare aus $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ mit

$$(a, b) \bowtie (c, d) \quad :\Longleftrightarrow \quad a \cdot d = b \cdot c$$

für alle $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$.

1. Ist $\bowtie$ reflexiv?
2. Ist $\bowtie$ symmetrisch?
3. Ist $\bowtie$ asymmetrisch?
4. Ist $\bowtie$ antisymmetrisch?
5. Ist $\bowtie$ total?
6. Ist $\bowtie$ transitiv?

Beweise deine Antworten!

Antworten

1. $\bowtie$ ist reflexiv.

   Seien $a, b \in \mathbb{Z}$ beliebige ganze Zahlen.
   $\implies a \cdot b = b \cdot a$.
   $\implies (a, b) \bowtie (a, b)$.

   □

2. $\bowtie$ ist symmetrisch.

   Seien $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ beliebige ganze Zahlen mit $(a, b) \bowtie (c, d)$.
   $\implies a \cdot d = b \cdot c$.
   $\implies c \cdot b = a \cdot d$.
   $\implies (c, d) \bowtie (a, b)$

   □

3. $\bowtie$ ist nicht asymmetrisch.

   Als Gegenbeispiel sind ganze Zahlen $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ gesucht, für die $(a, b) \bowtie (c, d)$ und $(c, d) \bowtie (a, b)$ gelten, z.B. $a = 1$, $b = 2$, $c = 2$ und $d = 4$. □

4. $\bowtie$ ist nicht antisymmetrisch.

   Als Gegenbeispiel sind ganze Zahlen $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ gesucht, für die $(a, b) \bowtie (c, d)$, $(c, d) \bowtie (a, b)$ und $(a, b) \neq (c, d)$ gelten, z.B. $a = 1$, $b = 2$, $c = 2$ und $d = 4$. □

5. $\bowtie$ ist nicht total.

   Als Gegenbeispiel sind ganze Zahlen $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ gesucht, für die $(a, b) \not\bowtie (c, d)$ und $(c, d) \not\bowtie (a, b)$ gelten, z.B. $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$ und $d = 4$. □

6. $\bowtie$ ist transitiv.

   Seien $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{Z}$ beliebige ganze Zahlen mit $(a, b) \bowtie (c, d)$ und $(c, d) \bowtie (e, f)$.

   $\Longrightarrow$ Es gilt $a \cdot d = b \cdot c$ und $c \cdot f = d \cdot e$.

   $\Longrightarrow$ Durch Gleichsetzen erhalten wir:

$$a \cdot d \cdot c \cdot f = b \cdot c \cdot d \cdot e.$$

   $\Longrightarrow$ Kürzen von $c \cdot d$ auf beiden Seiten liefert: $a \cdot f = b \cdot e$.

   $\Longrightarrow$ $(a, b) \bowtie (e, f)$.

□

Knifflige Quizfragen

Sei $\wr$ eine homogene Relation über den ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ mit

$$x \wr y \quad :\Longleftrightarrow \quad \exists k \in \mathbb{Z} : y^2 = k \cdot x$$

für alle $x, y \in \mathbb{Z}$.

1. Ist $\wr$ reflexiv?
2. Ist $\wr$ symmetrisch?
3. Ist $\wr$ asymmetrisch?
4. Ist $\wr$ antisymmetrisch?
5. Ist $\wr$ total?
6. Ist $\wr$ transitiv?

Beweise deine Antworten!

Antworten

1. $\wr$ ist reflexiv.

   Sei $a \in \mathbb{Z}$ eine beliebige ganze Zahl.
   $\Longrightarrow$ Es gibt ein $k \in \mathbb{Z}$ mit $a^2 = k \cdot a$, nämlich $k = a$.

   □

2. $\wr$ ist nicht symmetrisch.

   Als Gegenbeispiel sind ganze Zahlen $a, b \in \mathbb{Z}$ gesucht, für die $a \wr b$ und $b \not\wr a$ gelten, z.B. $a = 4$ und $b = 6$. □

3. $\wr$ ist nicht asymmetrisch.

   Als Gegenbeispiel sind ganze Zahlen $a, b \in \mathbb{Z}$ gesucht, für die $a \wr b$ und $b \wr a$ gelten, z.B. $a = 2$ und $b = 4$. □

4. $\wr$ ist nicht antisymmetrisch.

   Als Gegenbeispiel sind ganze Zahlen $a, b \in \mathbb{Z}$ gesucht, für die $a \wr b$, $b \wr a$ und $a \neq b$ gelten, z.B. $a = 2$ und $b = 4$. □

5. $\wr$ ist nicht total.

   Als Gegenbeispiel sind ganze Zahlen $a, b \in \mathbb{Z}$ gesucht, für die $a \not\wr b$ und $b \not\wr a$ gelten, z.B. $a = 2$ und $b = 3$. □

6. $\wr$ ist nicht transitiv. Als Gegenbeispiel sind ganze Zahlen $a, b, c \in \mathbb{Z}$ gesucht, für die $a \wr b$, $b \wr c$ und $a \not\wr c$ gelten, z.B. $a = 8$, $b = 4$ und $c = 2$. □

Themenübersicht

Relationenprodukt

Seien A, B und C drei Mengen, R eine Relation über A und B und S eine Relation über B und C. Dann gilt:

$$R \circ S := \{(a, c) \in A \times C \mid \exists b \in B : (a, b) \in R \text{ und } (b, c) \in S\}$$

$R \circ S$ ist dann eine Relation über A und C.

Damit $R \circ S$ definiert ist muss $R \subseteq A \times B$ und $S \subseteq B \times C$ gelten!

Beispiel

Gegeben seien Mengen $A = \{1, 2\}$, $B = \{3, 4\}$ und $C = \{5, 6\}$ und Relationen

$$\begin{aligned} R &= \{(1,3), (1,4), (2,3)\} \quad \text{über } A \text{ und } B \text{ und} \\ S &= \{(3,5), (4,5), (4,6)\} \quad \text{über } B \text{ und } C. \end{aligned}$$

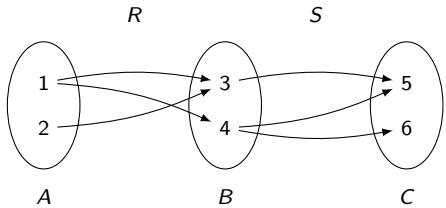
Dann folgt für $R \circ S$:

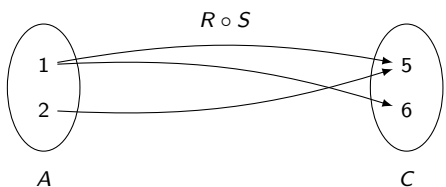
	$(3,5)$	$(4,5)$	$(4,6)$
$(1,3)$	$(1,5)$		
$(1,4)$		$(1,5)$	$(1,6)$
$(2,3)$	$(2,5)$		

Nach der Entfernung von Duplikaten erhalten wir:

$$R \circ S = \{(1,5), (1,6), (2,5)\}.$$

Graphisch:





Infos

- Folgende Intuition kann hilfreich sein: Kommt man im Graph von R in einem Schritt von a nach b und im Graph von S in einem Schritt von b nach c, dann kommt man im Graph von $R \circ S$ in einem Schritt von a nach c.
- Statt $R \circ S$ schreibt man oft nur RS, was aber gefährlich ist, weil man es mit der Konkatenation aus Folie 72 verwechseln kann.
- Das Relationenprodukt ist assoziativ. Für beliebige Relationen R, S, T gilt nämlich:

$$(R \circ S) \circ T = R \circ (S \circ T).$$

Aus diesem Grund lassen wir oft einfach die Klammern weg.

Quizfrage

Gegeben seien Mengen $A = \{1, 2, 3\}$ und $B = \{4, 5, 6\}$ und Relationen

$$\begin{array}{rcll} R & = & \{(1,4),(1,5),(2,4),(3,6)\} & \text{über } A \text{ und } B \text{ und} \\ S & = & \{(4,2),(5,2),(5,3),(6,1)\} & \text{über } B \text{ und } A. \end{array}$$

1. Wie sieht $R \circ S$ aus?
2. Wie sieht $S \circ R$ aus?

1. $R \circ S = \{(1,2),(1,3),(2,2),(3,1)\}$.

	$(4,2)$	$(5,2)$	$(5,3)$	$(6,1)$
$(1,4)$	$(1,2)$			
$(1,5)$		$(1,2)$	$(1,3)$	
$(2,4)$	$(2,2)$			
$(3,6)$				$(3,1)$

2. $S \circ R = \{(4,4),(5,4),(5,6),(6,4),(6,5)\}$.

	$(1,4)$	$(1,5)$	$(2,4)$	$(3,6)$
$(4,2)$			$(4,4)$	
$(5,2)$			$(5,4)$	
$(5,3)$				$(5,6)$
$(6,1)$	$(6,4)$	$(6,5)$		

Komposition von Relationen

Sei R eine homogene Relation über einer Menge A. Dann gilt für ein beliebiges $n \in \mathbb{N}_0$:

$$\begin{array}{lcl} R^0 & = & \{(x,x) \mid x \in A\} \quad = \quad \mathrm{id}_A \\ R^{n+1} & = & R^n \circ R \end{array}$$

Info

Aus dieser Definition und $\mathrm{id}_A \circ R = R = R \circ \mathrm{id}_A$ folgt sofort:

$$R^1 = R^0 \circ R = \mathrm{id}_A \circ R = R.$$

Beispiel

Für eine beliebige homogene Relation R gilt:

$$\begin{aligned} R^4 &= R^3 \circ R \\ &= (R^2 \circ R) \circ R \\ &= ((R^1 \circ R) \circ R) \circ R \\ &= ((R \circ R) \circ R) \circ R. \end{aligned}$$

Aufgrung der Assoziativität des Relationenprodukts schreiben wir oft auch einfach:

$$R^4 = R \circ R \circ R \circ R.$$

Info

Aus dieser formalen Definition von R^n folgt, zusammen mit der Assoziativität des Relationenprodukts, die etwas intuitivere Variante:

$$R^n = \underbrace{R \circ R \circ \ldots \circ R}_{n \text{ mal}}.$$

Graphische Bedeutung

Intuitiv enthält R^n alle Abkürzungen für Wege der Länge genau n in der graphischen Darstellung von R. Es gilt nämlich:

$$R^0 = \{(a, b) \in A \times A \mid a = b\}$$
$$R^n = \{(a, b) \in A \times A \mid \exists x_1, \ldots, x_{n-1} \in M : (a, x_1), (x_1, x_2), \ldots, (x_{n-1}, b) \in R\}$$

D.h., falls der Graph von R folgende Kanten enthält:

$$\underbrace{a \longrightarrow x_1 \longrightarrow x_2 \longrightarrow \ldots \longrightarrow x_{n-1} \longrightarrow b}_{\text{Weg der Länge } n \text{ von a nach b in } R},$$

dann enthält der Graph von R^n die Kante

$$\underbrace{a \longrightarrow b}_{\text{Kante von } a \text{ nach } b \text{ in } R^n} .$$

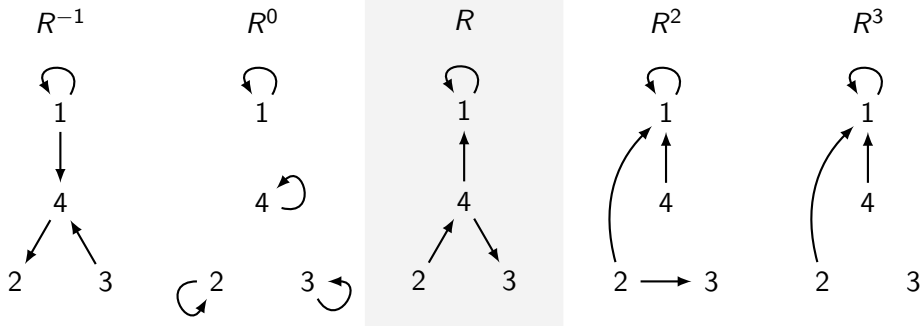
$x_1, \ldots, x_{n-1}$, a und b müssen nicht unbedingt alle verschieden sein!

Beispiel

Sei R eine homogene Relation über $[4]$ mit

$$R = \{(1,1),(2,4),(4,1),(4,3)\}.$$

Die Graphische Darstellungen von R^{-1}, R^0, R, R^2 und R^3 sind:



$R^4, R^5, R^6, \ldots$ gleichen alle R^3.

Hüllen von Relationen

Sei R eine homogene Relation über einer Menge A. Die reflexive Hülle R^{ref} von R ist die kleinste Relation, die R enthält und reflexiv ist. Es muss gelten:

(1) $R \subseteq R^{\text{ref}}$,

(2) R^{ref} reflexiv und

(3) $\forall R' \subseteq A \times A : (R \subseteq R' \text{ und } R' \text{ reflexiv} \implies R^{\text{ref}} \subseteq R')$

Analog sind die symmetrische Hülle R^{sym}, die transitive Hülle R^+ und die reflexive transitive Hülle R^* definiert.

Die Definitionen sind aber für uns kaum wichtig. Wichtig ist, wie man die Hüllen berechnet. Hierfür gibt es folgende Formeln:

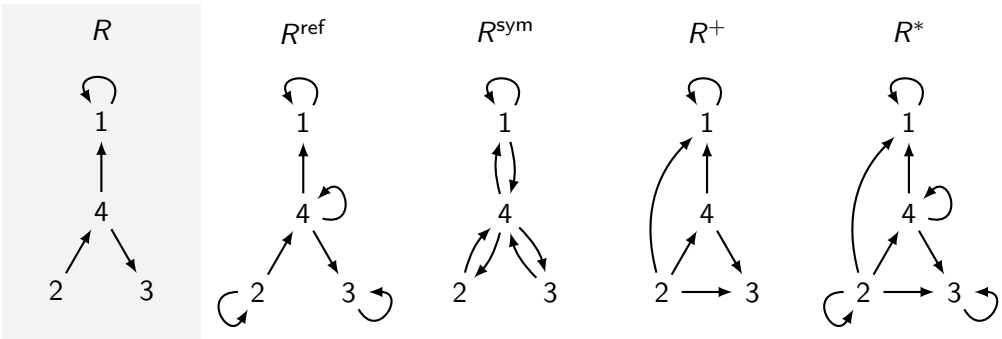
$$\begin{array}{lcll} R^{\text{ref}} & = & R^0 \cup R, & \\ R^{\text{sym}} & = & R \cup R^{-1}, & \\ R^+ & = & R \cup R^2 \cup R^3 \cup R^4 \cup \ldots & = \bigcup_{i=1}^{\infty} R^i, \\ R^* & = & R^0 \cup R \cup R^2 \cup R^3 \cup R^4 \cup \ldots & = \bigcup_{i=0}^{\infty} R^i. \end{array}$$

Beispiel

Sei R wieder die homogene Relation über [5] aus Folie 217 mit

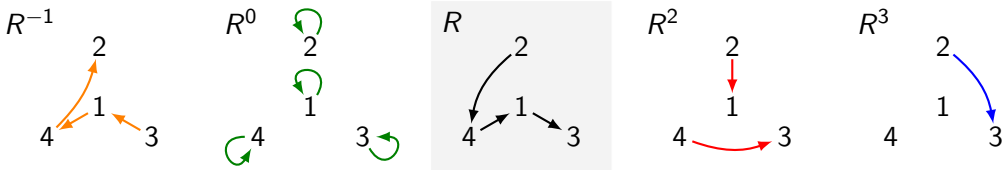
$$R = \{(1,1),(2,4),(3,5),(4,1),(4,3)\}.$$

Die Graphische Darstellung von R, R^{ref}, R^{sym}, R^{+} und R^{*} sind:

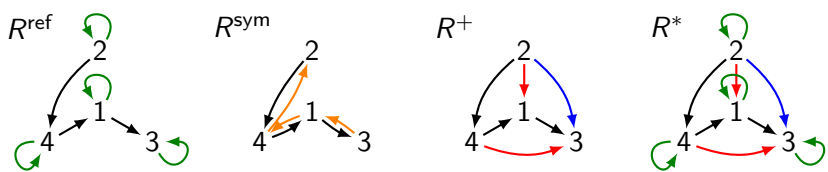


Buntes Beispiel

Sei $R = \{(1,3),(2,4),(4,1)\}$ eine homogene Relation über $[4]$. Dann gilt:



Wegen $R^4 = R^5 = R^6 = \ldots = \emptyset$ gilt für die Hüllen:



Quizfrage

Sei R eine homogene Relation über $[4]$ mit

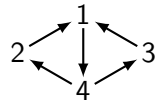
$$R = \{(1,2),(1,3),(2,4),(3,4),(4,1)\}.$$

Wie sehen R^{ref}, R^{sym}, R^{+} und R^{*} graphisch aus?

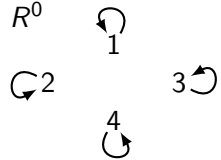
Antwort

Aus

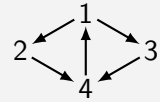
R^{-1}



R^0



R

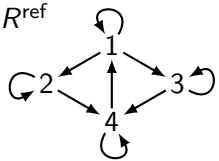


und

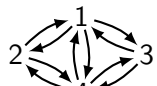
$$
\begin{array}{lllllll}
R^{-1} & = & R^2 & = & R^5 & = & R^8 & = & \dots \\
R^0 & = & R^3 & = & R^6 & = & R^9 & = & \dots \\
R & = & R^4 & = & R^7 & = & R^{10} & = & \dots
\end{array}
$$

folgt:

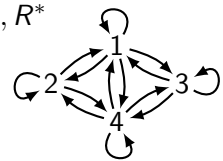
R^{ref}



R^{sym}



R^+, R^*



Quizfrage

Wieso gibt es keine asymmetrische, antisymmetrische oder totale Hüllen?

Antwort

Weil sie keinen Sinn machen würden!

- Eine Relation, die nicht asymmetrisch (bzw. nicht antisymmetrisch) ist, kann durch das Hinzufügen von Tupeln nicht asymmetrisch (bzw. antisymmetrisch) gemacht werden.
- Für eine nicht totale Relation R gibt es mehrere totale Relationen, die R enthalten und minimal wären.

Themenübersicht

Äquivalenzrelationen

Seien A eine Menge und R eine homogene Relation über A. Dann gilt:

$$R \text{ Äquivalenzrelation} \quad :\Longleftrightarrow \quad R \text{ reflexiv, symmetrisch und transitiv}$$

Info

Diese Definition schließt nicht aus, dass R mehr als diese drei Eigenschaften besitzen kann.

Beispiele

- Die Gleichheitsrelation $=$ (bzw. id_A) über einer beliebigen Menge A ist eine Äquivalenzrelation über A.
- Das kartesische Produkt $A \times A$ ist für jede Menge A eine Äquivalenzrelation.
- Die Kongruenzrelation $\equiv_n$ modulo n ist eine Äquivalenzrelation über $\mathbb{Z}$ (s. Folie 159).
- Die Wortlängenrelation $\|$ ist für jedes Alphabet Σ eine Äquivalenzrelation über Σ^* (s. Folie 191).

Äquivalenzrelation und Partitionen

Jede Äquivalenzrelation R über einer Grundmenge A entspricht genau einer Partition P von A. Die Klassen in P heißen dann Äquivalenzklassen. Und es gilt für alle $a, b \in A$:

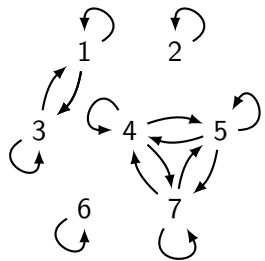
$$(a, b) \in R \iff \text{in } P \text{ sind } a \text{ und } b \text{ in der selben Äquivalenzklasse}$$

Innerhalb einer Äquivalenzklasse steht also jedes Element mit jedem anderen in Relation. Dagegen stehen zwei Elemente aus verschiedenen Äquivalenzklassen nie in Relation.

Die Zuordnung ist eindeutig, so dass jede Äquivalenzrelation genau eine Partition induziert und jede Partition genau eine Äquivalenzrelation. Somit gibt es beispielsweise so viele Äquivalenzrelationen, wie es Partitionen der Grundmenge A gibt.

Beispiel

Sei R folgende Äquivalenzrelation über der Grundmenge $[7]$:



R induziert die 4-Partition

$$P = \{\{1,3\},\{2\},\{4,5,7\},\{6\}\}$$

der Menge $[7]$.

Quizfragen

Gegeben seien folgende Äquivalenzrelationen $R_1, \ldots, R_5$ über $[4]$:

1. $R_1 = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,3),(4,4)\}$,
2. $R_2 = \{(1,1),(1,4),(2,2),(2,3),(3,2),(3,3),(4,1),(4,4)\}$,
3. $R_3 = \{(1,1),(1,3),(1,4),(2,2),(3,1),(3,3),(3,4),(4,1),(4,3),(4,4)\}$,
4. $R_4 = [4] \times [4]$,
5. $R_5 = \mathrm{id}_{[4]}$.

Welche Partition P_i von $[4]$ wird durch R_i induziert?

Antworten

1. $P_1 = \{\{1,2\},\{3\},\{4\}\}$.
2. $P_2 = \{\{1,4\},\{2,3\}\}$.
3. $P_3 = \{\{1,3,4\},\{2\}\}$
4. $P_4 = \{\{1,2,3,4\}\}$.
5. $P_5 = \{\{1\},\{2\},\{3\},\{4\}\}$.

Beispiel

Sei $\Sigma = \{a, b, c\}$ ein Alphabet und $L \subseteq \Sigma^*$ eine Sprache mit

$$L = \{\epsilon, a, b, c, ab, ac, bc, abc\}.$$

Die Einschränkung der Wortlängenrelation $\|$ auf L induziert folgende Partition P von L:

$$P = \{\{\epsilon\}, \{a, b, c\}, \{ab, ac, bc\}, \{abc\}\}.$$

Quizfrage

Sei $\Sigma = \{a, b\}$ ein Alphabet und $L \subseteq \Sigma^*$ eine Sprache mit

$$L = \{\epsilon, a, b, aa, ab, bb, aaa, aab, abb, bbb\}.$$

Wie wird L durch die Einschränkung der Wortlängenrelation $\|$ auf L partitioniert?

Antwort

Die Einschränkung der Wortlängenrelation $\|$ auf L induziert folgende Partition P von L:

$$P = \{\{\epsilon\}, \{a, b\}, \{aa, ab, bb\}, \{aaa, aab, abb, bbb\}\}.$$

Beispiel

Die Einschränkung der Kongruenzrelation modulo 4 $\equiv_4$ auf $[12]$ induziert folgende Partition P von $[12]$:

$$P = \{\{1, 5, 9\}, \{2, 6, 10\}, \{3, 7, 11\}, \{4, 8, 12\}\}.$$

Quizfrage

Wie wird $[9]$ durch die Einschränkung der Kongruenzrelation modulo 3 $\equiv_3$ auf $[9]$ partitioniert?

Antwort

Die Einschränkung von $\equiv_3$ auf $[9]$ induziert folgende Partition P von $[9]$:

$$P = \{\{1, 4, 7\}, \{2, 5, 8\}, \{3, 6, 9\}\}.$$

Beispiel

Es gibt genau zwei verschiedene Äquivalenzrelationen über [2], weil die Menge [2] auf genau zwei verschiedene Weisen partitioniert werden kann:

Partitionen	Äquivalenzrelationen
$P_1 = \{\{1\}, \{2\}\}$	$R_1 = \{(1,1), (2,2)\}$
$P_2 = \{\{1,2\}\}$	$R_2 = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2)\}$

Quizfrage

Wie viele verschiedene Äquivalenzrelationen gibt es über [3]?

Antwort

Es gibt 5 verschiedene Partitionen der Menge [3]. Somit sind das auch genau 5 Äquivalenzrelationen:

Partitionen	Äquivalenzrelationen
$P_1 = \{\{1\},\{2\},\{3\}\}$	$R_1 = \{(1,1),(2,2),(3,3)\}$
$P_2 = \{\{1,2\},\{3\}\}$	$R_2 = \{(1,1),(2,2),(3,3),(1,2),(2,1)\}$
$P_3 = \{\{1,3\},\{2\}\}$	$R_3 = \{(1,1),(2,2),(3,3),(1,3),(3,1)\}$
$P_4 = \{\{1\},\{2,3\}\}$	$R_4 = \{(1,1),(2,2),(3,3),(2,3),(3,2)\}$
$P_5 = \{\{1,2,3\}\}$	$R_5 = \{(1,1),(2,2),(3,3),(1,2),(2,1),(1,3),(3,1),(2,3),(3,2)\}$

Quizfragen

Sei $\ddagger$ eine Äquivalenzrelation über Zahlenpaare aus $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ mit

$$(a, b) \ddagger (c, d) \quad :\Longleftrightarrow \quad a + b = c + d$$

für alle $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$.

1. Wieso ist $\ddagger$ reflexiv?
2. Wieso ist $\ddagger$ symmetrisch?
3. Wieso ist $\ddagger$ transitiv?
4. Welche Partition P der Menge $[3] \times [3]$ wird durch die Einschränkung von $\ddagger$ auf $[3] \times [3]$ induziert?

Hinweis: Bei den ersten drei Fragen sind Beweise verlangt.

Antworten

1. Seien $a, b \in \mathbb{Z}$ beliebige ganze Zahlen.
   $\Longrightarrow$ Wegen $a + b = a + b$ gilt auch $(a, b) \ddagger (a, b)$.

   □

2. Seien $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ beliebige ganze Zahlen mit $(a, b) \ddagger (c, d)$.
   $\Longrightarrow$ $a + b = c + d$.
   $\Longrightarrow$ $c + d = a + b$.
   $\Longrightarrow$ $(c, d) \ddagger (a, b)$.

   □

3. Seien $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{Z}$ beliebige ganze Zahlen mit $(a, b) \ddagger (c, d)$ und $(c, d) \ddagger (e, f)$.
   $\Longrightarrow$ $a + b = c + d$ und $c + d = e + f$.
   $\Longrightarrow$ $a + b = e + f$.
   $\Longrightarrow$ $(a, b) \ddagger (e, f)$.

   □

4. $P = \{\{(1,1)\}, \{(1,2),(2,1)\}, \{(1,3),(2,2),(3,1)\}, \{(2,3),(3,2)\}, \{(3,3)\}\}$.

Themenübersicht

Partielle Ordnungen

Seien A eine Menge und R eine homogene Relation über A. Dann gilt:

$$R \text{ partielle Ordnung} \quad :\Longleftrightarrow \quad R \text{ reflexiv, antisymmetrisch und transitiv}$$

Eine totale Ordnung ist eine partielle Ordnung, die zusätzlich total ist.

Info

Wie bei der Äquivalenzrelation, schließt diese Definition nicht aus, dass R mehr als diese drei Eigenschaften besitzen kann.

Beispiele

- Die Gleichheitsrelation $=$ (bzw. id_A) über einer beliebigen Menge A ist eine partielle Ordnung über A.
- $\leq$ ist eine totale Ordnung über $\mathbb{Z}$.
- Für jede Menge A ist $\subseteq$ eine partielle Ordnung über $\mathcal{P}(A)$.
- Die Einschränkung von $\mid$ auf $\mathbb{N}_0$ ist eine partielle Ordnung (s. Folie 151).
- Für jedes Alphabet Σ sind die Relationen $\sqsubseteq_p$, $\sqsubseteq_s$ und $\sqsubseteq$ partielle Ordnungen (s. Folien 167, 175 und 183).

Partielle Ordnungen und Hasse-Diagramme

Jeder partiellen Ordnung R über einer Menge A kann man ein eindeutiges Hasse-Diagramm zuordnen und umgekehrt. Man entfernt hierzu alle reflexiven und transitiven Tupel von R und definiert das Ergebnis als Relation H:

$$H = \{(a, b) \in R \mid a \neq b \text{ und } \nexists\, x \in A : (a, x) \in R \text{ und } (x, b) \in R.\}$$

Das Hasse-Diagramm ist dann die graphische Darstellung von H, in der die Elemente so angeordnet sind, dass alle Pfeile von unten nach oben zeigen.

Fügt man einem Hasse-Diagramm H alle reflexive und transitive Tupel hinzu, so bekommt man die entsprechende partielle Ordnung R. Formal ist R also die reflexive transitive Hülle von H, d.h.: $R = H^*$.

Infos

- Mit Hasse-Diagrammen lassen sich Hierarchien graphisch darstellen. Jedes Element zeigt auf seinen direkten Vorgesetzten.
- Ein Hasse-Diagramm muss nicht notwendigerweise zusammenhängend sein! Es kann aus mehreren Teilen bestehen, die nicht miteinander verbunden sind.
- Weil die Richtung der Pfeile durch die Anordnung der Knoten bestimmt wird, können die Pfeilspitzen auch weggelassen werden.

Beispiel

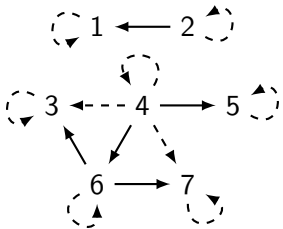
Sei R mit

$$R = \mathrm{id}_{[7]} \cup \{(2,1),(4,3),(4,5),(4,6),(4,7),(6,3),(6,7)\}$$

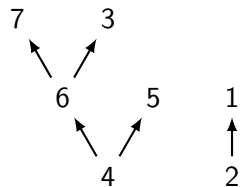
($\mathrm{id}_{[7]}$: $\{(1,1),\ldots,(7,7)\}$)

eine partielle Ordnung über [5].

R kann wie folgt durch das Hasse-Diagramm H graphisch dargestellt werden.



R



H

H entspricht genau R ohne transitive und reflexive Tupel (gestrichelte Pfeile).

Minimale und Maximale Elemente

Seien A eine Menge und R eine partielle Ordnung über A. Dann gilt für alle $a, b \in A$:

$$\begin{aligned} a \text{ minimal} &:\Longleftrightarrow (\forall x \in A : (x, a) \in R \Longrightarrow x = a) \\ b \text{ maximal} &:\Longleftrightarrow (\forall y \in A : (b, y) \in R \Longrightarrow y = b) \end{aligned}$$

Falls $(a, b) \in R$ für $a \neq b$ gilt, dann sagen wir „a ist kleiner als b“ bzw. „b ist größer als a“, analog zur partiellen Ordnung $\leq$.

Info

Intuitiv ist ein Element

- minimal, falls es in keinem Tupel rechts von einem anderen Element steht und
- maximal, falls es in keinem Tupel links von einem anderen Element steht.

Wenn a kleiner als b ist, dann muss b im Hasse-Diagramm über a gezeichnet werden!

Quizfragen

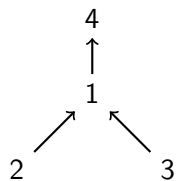
Gegeben seien folgende partielle Ordnungen über [4]:

1. $R_1 = \{(1,1),(1,4),(2,1),(2,2),(2,4),(3,1),(3,3),(3,4),(4,4)\}$,
2. $R_2 = \{(1,1),(2,1),(2,2),(3,3),(3,4),(4,4)\}$,
3. $R_3 = \{(1,1),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(3,3),(4,3),(4,4)\}$.

Wie sieht das Hasse-Diagramm H_i zu jeder partiellen Ordnung R_i aus? Welche Elemente sind minimal? Welche maximal?

Antworten

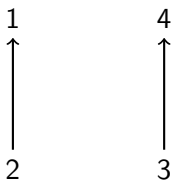
H_1 :



minimal: 2 und 3

maximal: 4

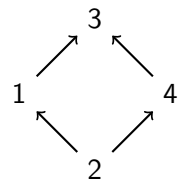
H_2 :



minimal: 2 und 3

maximal: 1 und 4

H_3 :



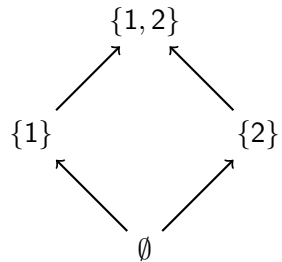
minimal: 2

maximal: 3

Beispiel

Die Einschränkung der Teilmengenrelation $\subseteq$ auf $\mathcal{P}([2])$ kann durch folgendes Hasse-Diagramm H graphisch dargestellt werden:

H :



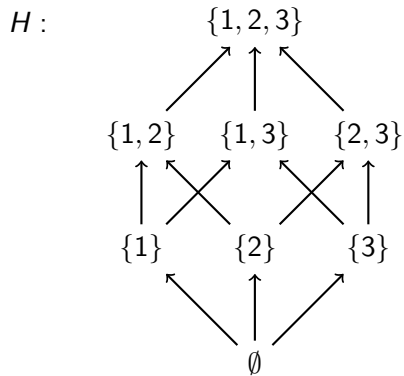
$\emptyset$ ist das einzige minimale Element und $\{1, 2\}$ das einzige maximale.

Quizfrage

Wie sieht das Hasse-Diagramm H zur Einschränkung der Teilmengenrelation $\subseteq$ auf $\mathcal{P}([3])$ aus?

Antwort

Hasse-Diagramm H zu $\subseteq$:

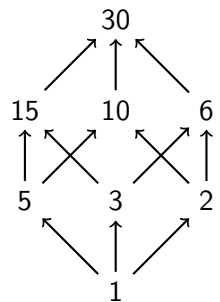


$\emptyset$ ist das einzige minimale Element und $\{1,2,3\}$ das einzige maximale.

Beispiel

Sei $A = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$. Die Einschränkung der Teilbarkeitsrelation $\mid$ auf A kann durch folgendes Hasse-Diagramm H graphisch dargestellt werden:

H :



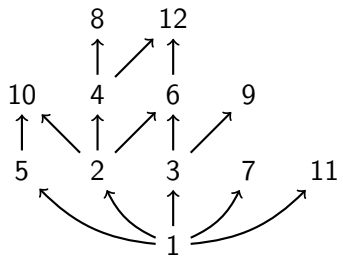
1 ist das einzige minimale Element und 30 das einzige maximale.

Quizfragen

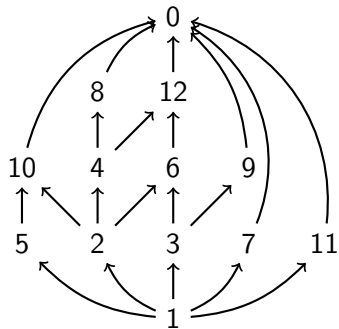
1. Wie sieht das Hasse-Diagramm H zur Einschränkung der Teilbarkeitsrelation $\mid$ auf $[12]$ aus?
2. Wie würde das Hasse-Diagramm aus 1. aussehen, wenn man die 0 mitberücksichtigen würde?

Antworten

1.



2.



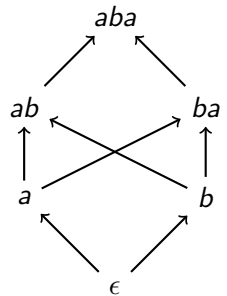
Beispiel

Sei $\Sigma = \{a, b, c\}$ ein Alphabet und $L \subseteq \Sigma^*$ mit

$$L = \{\epsilon, a, b, ab, ba, aba\}.$$

Die Einschränkung der Teilwortrelation $\sqsubseteq$ auf L kann durch folgendes Hasse-Diagramm H graphisch dargestellt werden:

H :



ϵ ist das einzige minimale Element und aba das einzige maximale.

Quizfrage

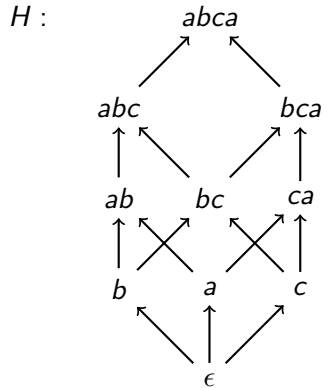
Sei $\Sigma = \{a, b, c\}$ ein Alphabet und $L \subseteq \Sigma^*$ mit

$$L = \{\epsilon, a, b, c, ab, bc, ca, abc, bca, abca\}.$$

Wie sieht das Hasse-Diagramm H zur Einschränkung der Teilwortrelation $\sqsubseteq$ auf L aus?

Antwort

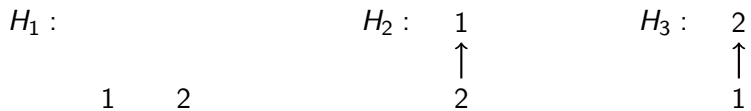
Hasse-Diagramm H:



ϵ ist das einzige minimale Element und *abca* das einzige maximale.

Beispiel

Es gibt genau 3 verschiedene Hasse-Diagramme H_1, H_2, H_3 über $[2]$:



Jedes Hasse-Diagramm H_i stellt genau eine partielle Ordnung R_i dar. Es gibt also genau 3 partielle Ordnungen über $[2]$:

$$R_1 = \{(1,1),(2,2)\}, \quad R_2 = \{(1,1),(2,1),(2,2)\}, \quad R_3 = \{(1,1),(1,2),(2,2)\}.$$

Quizfrage

Wie viele verschiedene partielle Ordnungen gibt es über der Grundmenge $[3]$?

Hinweis: Es reicht alle möglichen Hasse-Diagramme zu finden. Zu jedem Hasse-Diagramm H ist nämlich $R = H^*$ die entsprechende partielle Ordnung.

Antwort

Es gibt 19 verschiedene Hasse-Diagramme (und somit auch genau 19 partielle Ordnungen) über [3]:

- eins, in dem alle 3 Elemente minimal und maximal sind:

$$H_1: \quad 1 \qquad 2 \qquad 3$$

- sechs, in denen ein Element minimal, eins maximal und eins beides ist:

$$H_2: \begin{array}{ccc} 1 & & \\ \uparrow & & 3 \\ 2 & & \end{array} \qquad H_3: \begin{array}{ccc} 1 & & \\ \uparrow & & 2 \\ 3 & & \end{array} \qquad H_4: \begin{array}{ccc} 2 & & \\ \uparrow & & 3 \\ 1 & & \end{array}$$

$$H_5: \begin{array}{ccc} 2 & & \\ \uparrow & & 1 \\ 3 & & \end{array} \qquad H_6: \begin{array}{ccc} 3 & & \\ \uparrow & & 2 \\ 1 & & \end{array} \qquad H_7: \begin{array}{ccc} 3 & & \\ \uparrow & & 1 \\ 2 & & \end{array}$$

- sechs, in denen ein Element minimal ist, eins maximal und eins beides:

$$H_8: \begin{matrix}1\\ \uparrow\\ 2\\ \uparrow\\ 3\end{matrix} \qquad H_9: \begin{matrix}1\\ \uparrow\\ 3\\ \uparrow\\ 2\end{matrix} \qquad H_{10}: \begin{matrix}2\\ \uparrow\\ 1\\ \uparrow\\ 3\end{matrix} \qquad H_{11}: \begin{matrix}2\\ \uparrow\\ 3\\ \uparrow\\ 1\end{matrix} \qquad H_{12}: \begin{matrix}3\\ \uparrow\\ 1\\ \uparrow\\ 2\end{matrix} \qquad H_{13}: \begin{matrix}3\\ \uparrow\\ 2\\ \uparrow\\ 1\end{matrix}$$

- drei, in denen ein Element maximal ist und zwei minimal:

$$H_{14}: \begin{matrix} & 1 & \\ \nearrow & & \nwarrow \\ 2 & & 3\end{matrix} \qquad H_{15}: \begin{matrix} & 2 & \\ \nearrow & & \nwarrow \\ 1 & & 3\end{matrix} \qquad H_{16}: \begin{matrix} & 3 & \\ \nearrow & & \nwarrow \\ 1 & & 2\end{matrix}$$

- drei, in denen ein Element minimal ist und zwei maximal:

$$H_{17}: \begin{matrix}2 & & 3\\ & \nwarrow\ \nearrow & \\ & 1 & \end{matrix} \qquad H_{18}: \begin{matrix}1 & & 3\\ & \nwarrow\ \nearrow & \\ & 2 & \end{matrix} \qquad H_{19}: \begin{matrix}1 & & 2\\ & \nwarrow\ \nearrow & \\ & 3 & \end{matrix}$$

Quizfragen

Sei $\leq_2$ eine partielle Ordnung über Zahlenpaare aus $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ mit

$$(a, b) \leq_2 (c, d) \quad :\Longleftrightarrow \quad a \leq c \text{ und } b \leq d$$

für alle $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$.

1. Wieso ist $\leq_2$ reflexiv?
2. Wieso ist $\leq_2$ antisymmetrisch?
3. Wieso ist $\leq_2$ transitiv?
4. Wie sieht das Hasse-Diagramm der Einschränkung von $\leq_2$ auf $[3] \times [3]$?

Hinweis: Bei den ersten drei Fragen sind Beweise verlangt.

Antworten

1. Seien $a, b \in \mathbb{Z}$ beliebige ganze Zahlen.
   $\Longrightarrow$ Wegen $a \leq a$ und $b \leq b$ gilt auch $(a, b) \leq_2 (a, b)$.

□

2. Seien $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ beliebige ganze Zahlen mit $(a, b) \leq_2 (c, d)$ und $(c, d) \leq_2 (a, b)$.
   $\Longrightarrow$ $a \leq c$, $b \leq d$, $c \leq a$ und $d \leq b$.
   $\Longrightarrow$ $a = c$ und $b = d$.
   $\Longrightarrow$ $(a, b) = (c, d)$.

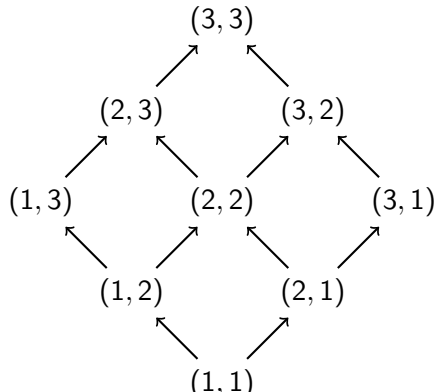
□

3. Seien $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{Z}$ beliebige ganze Zahlen mit $(a, b) \leq_2 (c, d)$ und $(c, d) \leq_2 (e, f)$.
   $\Longrightarrow$ $a \leq c$, $b \leq d$, $c \leq e$ und $d \leq f$.
   $\Longrightarrow$ $a \leq c \leq e$ und $b \leq d \leq f$.
   $\Longrightarrow$ $a \leq e$ und $b \leq f$.
   $\Longrightarrow$ $(a, b) \leq_2 (e, f)$.

□

4. Hasse-Diagramm H zur Einschränkung von $\leq_2$ auf $[3] \times [3]$:

H :



$(1, 1)$ ist das einzige minimale Element und $(3, 3)$ das einzige maximale.

Quizfragen

Gegeben seien folgende totale Ordnungen über $[3]$:

1. $R_1 = \{(1,1),(2,1),(2,2),(3,1),(3,2),(3,3)\}$,
2. $R_2 = \{(1,1),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(3,3)\}$,
3. $R_3 = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,2),(3,2),(3,3)\}$.

Wie sieht das Hasse-Diagramm H_i zu jeder totalen Ordnung R_i aus?

Antworten

H_1 : 1 ↑ 2 ↑ 3

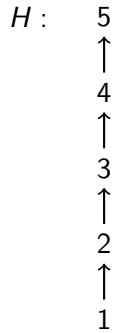
H_2 : 3 ↑ 1 ↑ 2

H_3 : 2 ↑ 3 ↑ 1

Quizfrage

Wie sieht das Hasse-Diagramm H zur Einschränkung der Kleiner-gleich-Relation $\leq$ auf $[5]$ aus?

Antwort



Quizfrage

Wie viele totale Ordnungen gibt es über [6]?

Antwort

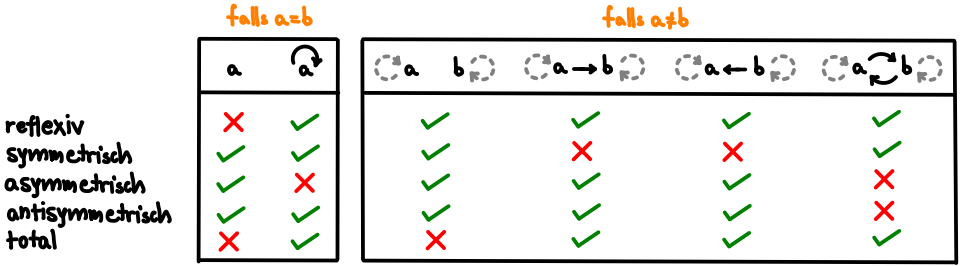
So viele wie die Anzahl der Möglichkeiten 6 verschiedene Objekte in eine Reihe zu ordnen:

$$6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$$

Themenübersicht

Zählen von Relationen

Sei $n \geq 1$. Wir betrachten homogene Relationen über einer n-elementigen Menge A. Um die Anzahl an Relationen mit gegebenen Eigenschaften zu bestimmen, betrachtet man die Tabelle aus Folie 132:



Seien dann $k_1 \in \{0, 1, 2\}$ die Anzahl der Häkchen (✓) in der linken Hälfte der Tabelle und $k_2 \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ die Anzahl der Häkchen in der rechten Hälfte. Dann ist die gesuchte Anzahl an Relationen genau

$$k_1{}^n \cdot k_2{}^{n(n-1)/2}.$$

Erstes Beispiel

Wir wissen, dass es insgesamt 2^{n^2} Relationen gibt. Wir bestätigen das mit diesem super coolen Trick.

Erlaubt man alle Möglichkeiten, so erhält man mit $k_1 = 2$ und $k_2 = 4$:

$$2^n \cdot 4^{n(n-1)/2} = 2^n \cdot 2^{2n(n-1)/2} = 2^n \cdot 2^{n(n-1)} = 2^n \cdot 2^{n^2-n} = 2^{n+n^2-n} = 2^{n^2}.$$

Zweites Beispiel

Die Anzahl an reflexiven Relationen ist genau

$$1^n \cdot 4^{n(n-1)/2} = 4^{n(n-1)/2} = 2^{2n(n-1)/2} = 2^{2n(n-1)/2} = 2^{n(n-1)}.$$

Erinnerung

Drittes Beispiel

Die Anzahl an symmetrischen Relationen ist genau

$$2^n \cdot 2^{n(n-1)/2} = 2^{n+n(n-1)/2} = 2^{n(n+1)/2}.$$

Erinnerung

Viertes Beispiel

Die Anzahl an asymmetrischen Relationen ist genau

$$1^n \cdot 3^{n(n-1)/2} = 3^{n(n-1)/2}.$$

Erinnerung

Fünftes Beispiel

Die Anzahl an antisymmetrischen Relationen ist genau

$$2^n \cdot 3^{n(n-1)/2}.$$

Erinnerung

Sechstes Beispiel

Die Anzahl an totalen Relationen ist genau

$$1^n \cdot 3^{n(n-1)/2} = 3^{n(n-1)/2}.$$

Erinnerung

Transitive Relationen

Die schlechte Nachricht: Dieser Trick funktioniert leider nicht für transitive Relationen.

Die gute Nachricht: Das kann in der Klausur nicht abgefragt werden, weil für die Anzahl an transitiven Relationen noch keine abgeschlossene Formel bekannt ist ;-)

Sollte die Frage für ein kleines n doch vorkommen, dann kann das hier vielleicht helfen:

n:	0	1	2	3	4	$\cdots$
Anzahl:	1	2	13	171	3994	$\cdots$

Für Neugierige:

- `https://cs.uwaterloo.ca/journals/JIS/VOL7/Pfeiffer/pfeiffer6.pdf`
- `http://oeis.org/A006905`

Äquivalenzrelationen

Äquivalenzrelationen sind, wie transitive Relationen, auch schwer zu zählen. Wir wissen, dass es genau so viele Äquivalenzrelationen wie Partitionen der Grundmenge gibt, aber leider gibt es hierfür keine schöne Formel.

Sollte die Frage für ein kleines n doch vorkommen, dann kann das hier vielleicht helfen:

n:	0	1	2	3	4	5	6	7	8	$\cdots$
Anzahl:	1	1	2	5	15	52	203	877	4140	$\cdots$

Für Neugierige:

- `http://de.wikipedia.org/wiki/Bellsche_Zahl`
- `http://oeis.org/A000110`

Partielle Ordnungen

Hier ist es ähnlich wie bei Äquivalenzrelationen. Wir wissen, dass es genau so viele partielle Ordnungen wie Hasse-Diagramme gibt, aber wir haben keine Formel dafür.

Sollte die Frage für ein kleines n doch vorkommen, dann kann das hier vielleicht helfen:

n:	0	1	2	3	4	5	$\cdots$
Anzahl:	1	1	3	19	219	4231	$\cdots$

Für Neugierige:

- `http://oeis.org/A001035`

Totale Ordnungen

Bei totalen Ordnungen ist es wieder einfach. Wir wissen, dass es genau so viele totale Ordnungen wie Hasse-Diagramme gibt, die nur aus einem „Strang“ bestehen. Die Anzahl an totalen Ordnungen von n Elementen ist genau die Anzahl an Reihenfolgen für n Elementen, d.h.:

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 1.$$

Quizfrage

Sei M eine n-elementige Menge. Wie viele Relationen $R \subseteq M \times M$ gibt es, die antisymmetrisch und total sind?

Antwort

Was ist für ein beliebiges $a \in M$ erlaubt?

- $(a, a) \in R$ ✓
- $(a, a) \notin R$ ✗

Es gilt also $k_1 = 1$.

Was ist für beliebige aber verschiedene $a, b \in M$ erlaubt?

- $(a, b) \in R$ und $(b, a) \in R$ ✗
- $(a, b) \in R$ und $(b, a) \notin R$ ✓
- $(a, b) \notin R$ und $(b, a) \in R$ ✓
- $(a, b) \notin R$ und $(b, a) \notin R$ ✗

Es gilt also $k_2 = 2$.

Die Anzahl solcher Relationen ist also genau

$$1^n \cdot 2^{n(n-1)/2} = 2^{n(n-1)/2}.$$

Noch eine Quizfrage

Sei M eine n-elementige Menge. Wie viele Relationen $R \subseteq M \times M$ gibt es, die symmetrisch und asymmetrisch sind?

Antwort

Was ist für ein beliebiges $a \in M$ erlaubt?

- $(a, a) \in R$ ✗
- $(a, a) \notin R$ ✓

Es gilt also $k_1 = 1$.

Was ist für beliebige aber verschiedene $a, b \in M$ erlaubt?

- $(a, b) \in R$ und $(b, a) \in R$ ✗
- $(a, b) \in R$ und $(b, a) \notin R$ ✗
- $(a, b) \notin R$ und $(b, a) \in R$ ✗
- $(a, b) \notin R$ und $(b, a) \notin R$ ✓

Es gilt also $k_2 = 1$.

Die Anzahl solcher Relationen ist also genau

$$1^n \cdot 1^{n(n-1)/2} = 1.$$

Und noch eine Quizfrage

Sei M eine n-elementige Menge. Wie viele Relationen $R \subseteq M \times M$ gibt es, die asymmetrisch und total sind?

Antwort

Was ist für ein beliebiges $a \in M$ erlaubt?

- $(a, a) \in R$ ✗
- $(a, a) \notin R$ ✗

Es gilt also $k_1 = 0$.

Was ist für beliebige aber verschiedene $a, b \in M$ erlaubt?

- $(a, b) \in R$ und $(b, a) \in R$ ✗
- $(a, b) \in R$ und $(b, a) \notin R$ ✓
- $(a, b) \notin R$ und $(b, a) \in R$ ✓
- $(a, b) \notin R$ und $(b, a) \notin R$ ✗

Es gilt also $k_2 = 2$.

Die Anzahl solcher Relationen ist also genau

$$0^n \cdot 2^{n(n-1)/2} = 0.$$

Letzte Quizfrage

Sei $n \in \mathbb{N}$. Wie viele Relationen $R \subseteq [n] \times [n]$ gibt es, die die Eigenschaft

$$\forall x, y \in [n] : (x, y) \in R \implies x < y \tag{1}$$

besitzen?

Hinweis: Intuitiv besagt (1), dass jedes Element nur zu einem größeren Element in Relation stehen darf (aber nicht muss).

Antwort

Was ist für ein beliebiges $a \in [n]$ erlaubt?

- $(a, a) \in R$ ✗
- $(a, a) \notin R$ ✓

Es gilt also $k_1 = 1$.

Was ist für beliebige aber verschiedene $a, b \in [n]$ erlaubt?

- $(a, b) \in R$ und $(b, a) \in R$ ✗
- $(a, b) \in R$ und $(b, a) \notin R$ ✓ (falls $a < b$) bzw. ✗ (falls $a > b$)
- $(a, b) \notin R$ und $(b, a) \in R$ ✗ (falls $a < b$) bzw. ✓ (falls $a > b$)
- $(a, b) \notin R$ und $(b, a) \notin R$ ✓

Es gilt also $k_2 = 2$ (egal, ob $a < b$ oder $a > b$).

Die Anzahl solcher Relationen ist also genau

$$1^n \cdot 2^{n(n-1)/2} = 2^{n(n-1)/2}.$$

Themenübersicht

Abbildungen

Eine Abbildung (oder Funktion) f ist eine Zuordnung zwischen zwei Mengen A und B, so dass jedem Element $a \in A$ genau ein Element $b \in B$ zugeordnet wird. Wir schreiben dann $f(a) = b$.

Info

Eigentlich ist eine Funktion nichts anderes als eine linkstotale und rechtseindeutige Relation $f \subseteq A \times B$.

Schreibweisen

1. Als Relation:

$$f \subseteq A \times B \text{ mit } f = \{(a_1, f(a_1)), (a_2, f(a_2)), (a_3, f(a_3)), \ldots\}$$

2. Als Zuordnungsvorschrift:

$$f\colon A \to B,\ a_1 \mapsto f(a_1),\ a_2 \mapsto f(a_2),\ a_3 \mapsto f(a_3), \ldots$$

3. Als Tabelle:

x	a_1	a_2	a_3	$\ldots$
$f(x)$	$f(a_1)$	$f(a_2)$	$f(a_3)$	$\ldots$

Info

B^A ist die Menge aller Funktionen von A nach B und $f : A \to B$ steht für $f \in B^A$.

Wichtig!

Es ist wichtig die Vorstellung zu verwerfen, vor allem wenn man erst kürzlich mit der Schule fertig geworden ist, dass Funktionen nur für reelle Zahlen definiert sind und mathematische Ausdrücke wie z.B. $f(x) = x^2$, $f(x) = \sin(x)$ oder $f(x) = e^x$ beinhalten müssen. Einfache und vor allem endliche Funktion spielen bei uns eine sehr wichtige Rolle! Beispiel einer endlichen Funktion wäre $f : \{a, b, c\} \to \{d, e\}$ mit $f(a) = d$, $f(b) = e$ und $f(c) = d$.

Graphische Darstellung von Funktionen

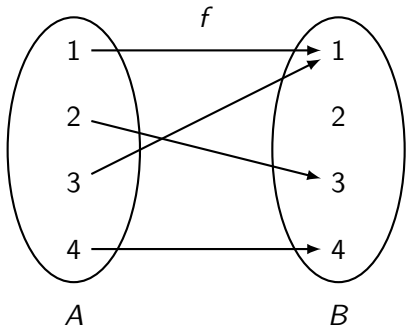
Die graphische Darstellung von Funktionen funktioniert analog zu der von Relationen. Wichtig ist, dass bei einer Funktion $f : A \to B$ jedes Element aus A von genau einem Pfeil verlassen wird!

Beispiel

Die Funktion $f : [4] \to [4]$ mit

$$1 \mapsto 1, \quad 2 \mapsto 3, \quad 3 \mapsto 1, \quad 4 \mapsto 4$$

kann graphisch wie folgt dargestellt werden:



Quizfrage

Wie viele verschiedene Funktionen $f : [4] \to [3]$ gibt es?

Antwort

Für jedes der 4 Elemente in [4] gibt es 3 Abbildungsmöglichkeiten in [3]. D.h. für jedes

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \in [3]^4$$

ist

$$1 \mapsto x_1, \quad 2 \mapsto x_2, \quad 3 \mapsto x_3, \quad 4 \mapsto x_4$$

eine mögliche Funktion. Es gibt also $|[3]^4| = 3^4 = 81$ verschiedene Funktionen.

Info

Für die Menge B^A aller Funktionen $f : A \to B$ gilt im Allgemeinen:

$$\left|B^A\right| = |B|^{|A|}.$$

Daher kommt auch die seltsame Notation B^A.

Bild und Urbild einer Funktion

Sei $f : A \to B$ eine Funktion.

- $f(a)$ ist das Bild des Elements $a \in A$
- Das Urbild $f^{-1}(b)$ eines Elements $b \in B$ ist definiert als:

$$f^{-1}(b) = \{a \in A \mid f(a) = b\}.$$

- Das Bild $f(A')$ einer Menge $A' \subseteq A$ ist:

$$f(A') = \bigcup_{a \in A'} \{f(a)\}.$$

- Das Urbild $f^{-1}(B')$ einer Menge $B' \subseteq B$ ist:

$$f^{-1}(B') = \bigcup_{b \in B'} f^{-1}(b).$$

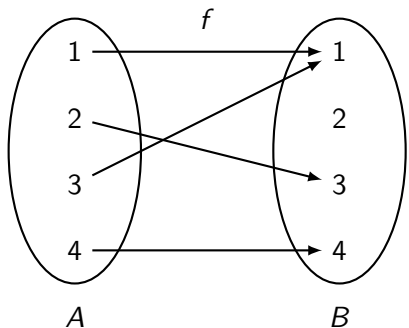
Infos

- Intuitiv wendet man bei $f(A')$ f auf jedes Element von A' an.
- Intuitiv wendet man bei $f^{-1}(B')$, analog zu $f(A')$, f^{-1} auf jedes Element von B' an.
- f^{-1} ist bei uns nicht die Umkehrfunktion, sondern die Urbildmenge!
- Es gilt immer:

$$x \in f^{-1}(B') \iff f(x) \in B' \ .$$

Beispiel

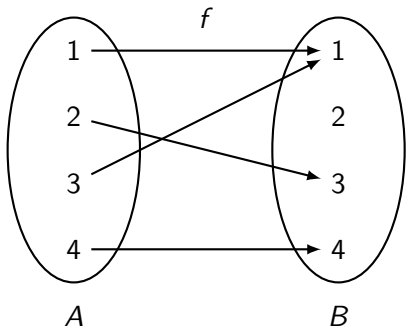
Sei $f : A \to B$ wieder folgende Funktion:



Die Bilder aller Elemente $a \in A$ sind:

$$f(1) = 1, \quad f(2) = 3, \quad f(3) = 1, \quad f(4) = 4.$$

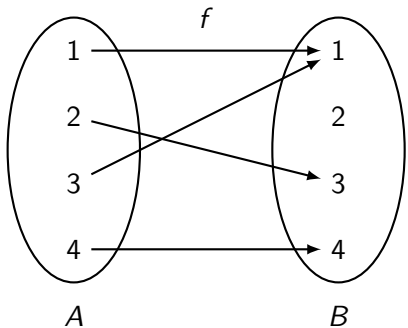
Sei $f : A \to B$ wieder folgende Funktion:



Die Urbilder aller Elemente $b \in B$ sind:

$$f^{-1}(1) = \{1, 3\}, \quad f^{-1}(2) = \emptyset, \quad f^{-1}(3) = \{2\}, \quad f^{-1}(4) = \{4\}.$$

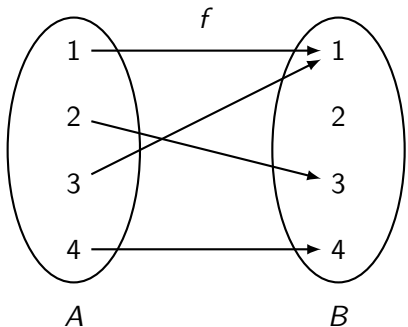
Sei $f : A \to B$ wieder folgende Funktion:



Die Bilder einiger Mengen $A' \subseteq A$ sind:

$$f(\emptyset) = \emptyset, \quad f(\{1\}) = \{1\}, \quad f(\{3,4\}) = \{1,4\}, \quad f(\{1,2,3\}) = \{1,3\}.$$

Sei $f : A \to B$ wieder folgende Funktion:



Die Urbilder einiger Mengen $B' \subseteq B$ sind:

$$f^{-1}(\emptyset) = \emptyset, \quad f^{-1}(\{1\}) = \{1, 3\}, \quad f^{-1}(\{2\}) = \emptyset, \quad f^{-1}(\{1, 4\}) = \{1, 3, 4\}.$$

Quizfrage

Welche der folgenden Aussagen gelten für beliebige Funktionen $f : A \to B$ und alle Mengen $X \subseteq A, Y \subseteq B$?

$$|f(X)| \leq |X|, \qquad |f^{-1}(Y)| \leq |Y|,$$
$$|f(X)| = |X|, \qquad |f^{-1}(Y)| = |Y|,$$
$$|f(X)| \geq |X|, \qquad |f^{-1}(Y)| \geq |Y|.$$

Antwort

Im Allgemeinen gilt nur:

$$|f(X)| \leq |X|.$$

Eigenschaften von Funktionen

Sei $f : A \to B$. Dann gilt:

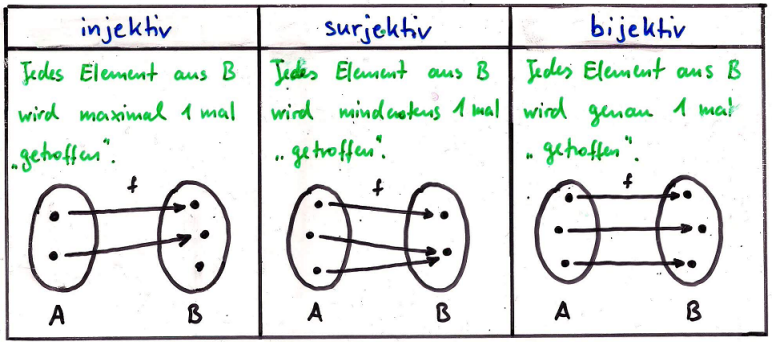
$$\begin{aligned} f \text{ injektiv} &:\iff \forall b \in B : |f^{-1}(b)| \leq 1 \\ f \text{ surjektiv} &:\iff \forall b \in B : |f^{-1}(b)| \geq 1 \\ f \text{ bijektiv} &:\iff \forall b \in B : |f^{-1}(b)| = 1 \end{aligned}$$

Info

Für Beweise sind folgende äquivalente Aussagen sehr nützlich:

$$\begin{aligned} f \text{ injektiv} &\iff (\forall a_1, a_2 \in A : f(a_1) = f(a_2) \implies a_1 = a_2) \\ f \text{ surjektiv} &\iff \forall b \in B : \exists a \in A : f(a) = b \\ f \text{ bijektiv} &\iff f \text{ injektiv und surjektiv} \end{aligned}$$

Graphische Bedeutung

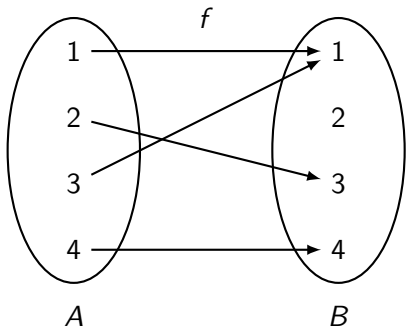


Coole Eselsbrücken:

injektiv $\rightsquigarrow$ inferior $\rightsquigarrow$ weniger $\rightsquigarrow$ 1 oder weniger
surjektiv $\rightsquigarrow$ superior $\rightsquigarrow$ mehr $\rightsquigarrow$ 1 oder mehr

Beispiel

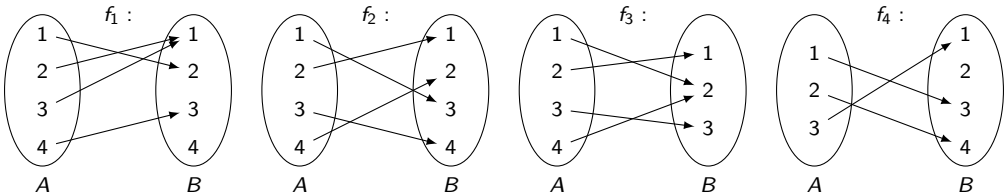
Sei $f : A \to B$ wieder folgende Funktion:

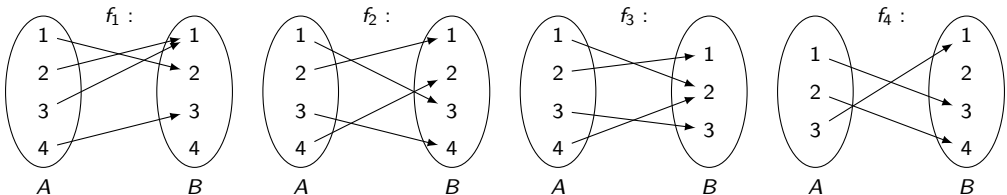


- f ist nicht injektiv, da $|f^{-1}(1)| = |\{1, 3\}| = 2$.
- f ist nicht surjektiv, da $|f^{-1}(2)| = |\emptyset| = 0$.

Quizfrage

Welche Eigenschaften besitzen folgende Funktionen?





- f_1 ist nicht injektiv und nicht surjektiv.
- f_2 ist injektiv und surjektiv (also bijektiv).
- f_3 ist surjektiv und nicht injektiv.
- f_4 ist injektiv und nicht surjektiv.

Quizfragen

Welche Eigenschaften besitzen folgende Funktionen?

1. $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}_0$ mit $f(x) = x$,
2. $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}_0$ mit $f(x) = x^2$,
3. $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ mit $f(x) = 5$,
4. $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ mit $f(x) = x - 3$,
5. $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ mit $f(x) = 2^x$,
6. $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}_0$ mit $f(x) = |x|$,
7. $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ mit $f(x) = x + 1$,
8. $f : \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ mit $f((x, y)) = x + y$,
9. $f : \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ mit $f((x, y)) = x \cdot y$,
10. $f : \{0\} \to \{1\}$ mit $f(x) = e^{2\pi x}$.

Antworten

1. f ist injektiv, da aus $f(a_1) = f(a_2)$ für alle $a_1, a_2 \in \mathbb{N}$ folgt: $a_1 = f(a_1) = f(a_2) = a_2$. f ist nicht surjektiv, da z.B. $|f^{-1}(0)| = 0$.
2. f ist nicht injektiv, da z.B. $|f^{-1}(1)| = 2$. f ist nicht surjektiv, da $|f^{-1}(2)| = 0$.
3. f ist nicht injektiv, da z.B. $|f^{-1}(5)| = \infty$. f ist nicht surjektiv, da z.B. $|f^{-1}(4)| = 0$.
4. f ist injektiv, da für alle $a_1, a_2 \in \mathbb{Z}$ gilt: $f(a_1) = f(a_2) \Longrightarrow a_1 - 3 = a_2 - 3 \Longrightarrow a_1 = a_2$. f ist surjektiv, da für jedes $b \in \mathbb{Z}$ ein $a \in \mathbb{Z}$ gibt mit $f(a) = b$, nämlich $a = b + 3$.
5. f ist injektiv, da für alle $a_1, a_2 \in \mathbb{Z}$ gilt: $f(a_1) = f(a_2) \Longrightarrow 2^{a_1} = 2^{a_2} \Longrightarrow \ln(2^{a_1}) = \ln(2^{a_2}) \Longrightarrow a_1 \ln 2 = a_2 \ln 2 \Longrightarrow a_1 = a_2$. f ist nicht surjektiv, da z.B. $|f^{-1}(0)| = 0$.

6. f ist nicht injektiv, da z.B. $|f^{-1}(1)| = 2$. f ist surjektiv, da für jedes $b \in \mathbb{N}_0$ ein a existiert mit $f(a) = |a| = b$, nämlich $a = b$ (oder $a = -b$).
7. f ist injektiv, da für alle $a_1, a_2 \in \mathbb{Z}$ gilt:
   $f(a_1) = f(a_2) \Longrightarrow a_1 + 1 = a_2 + 1 \Longrightarrow a_1 = a_2$. f ist nicht surjektiv, da z.B. $|f^{-1}(0)| = 0$.
8. f ist nicht injektiv, da z.B. $|f^{-1}(1)| = |\{(0,1),(1,0)\}| = 2$. f ist surjektiv, da es für jedes $b \in \mathbb{N}_0$ ein $(a_1, a_2) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ gibt mit $f((a_1, a_2)) = a_1 + a_2 = b$ gibt, z.B. $(a_1, a_2) = (b, 0)$.
9. f ist nicht injektiv, da z.B. $|f^{-1}(2)| = |\{(1,2),(2,1)\}| = 2$. f ist surjektiv, da es für jedes $b \in \mathbb{N}_0$ ein $(a_1, a_2) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ gibt mit $f((a_1, a_2)) = a_1 \cdot a_2 = b$ gibt, z.B. $(a_1, a_2) = (b, 1)$.
10. Da die Definitionsmenge von f nur die 0 enthält, die Zielmenge nur die 1 und $f(0) = e^2\pi \cdot 0 = e^0 = 1$ gilt, ist f bijektiv.

Quizfrage

Seien A und B zwei endliche Mengen und $f : A \to B$ eine Funktion. Welche der folgenden Aussagen gelten immer?

$$
\begin{array}{lcl}
|A| \leq |B| & \Longrightarrow & f \text{ injektiv}, \\
|A| \geq |B| & \Longrightarrow & f \text{ surjektiv}, \\
|A| = |B| & \Longrightarrow & f \text{ bijektiv}, \\
f \text{ injektiv} & \Longrightarrow & |A| \leq |B|, \\
f \text{ surjektiv} & \Longrightarrow & |A| \geq |B|, \\
f \text{ bijektiv} & \Longrightarrow & |A| = |B|.
\end{array}
$$

Antwort

Im Allgemeinen gelten nur:

$$\begin{aligned} f \text{ injektiv} &\implies |A| \leq |B|, \\ f \text{ surjektiv} &\implies |A| \geq |B|, \\ f \text{ bijektiv} &\implies |A| = |B|. \end{aligned}$$

Quizfragen

1. Wie viele injektive Funktionen $f : [3] \to [7]$ gibt es?
2. Wie viele bijektive Funktionen $f : [5] \to [5]$ gibt es?

Antworten

1. Für die 1 hat man 7 Abbildungsmöglichkeiten, für die 2 nur noch 6 und für die 3 nur noch 5. Die gesuchte Anzahl ist also

$$7 \cdot 6 \cdot 5 = 210.$$

2. Für die 1 hat man 5 Abbildungsmöglichkeiten, für die 2 nur noch 4, für die 3 nur noch 3, usw. Die gesuchte Anzahl ist also

$$5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120.$$

Umkehrfunktionen

Seien A und B beliebige Mengen und $f : A \to B$ eine Funktion.

- Ist f bijektiv, dann besitzt sie eine eindeutige Umkehrfunktion $f^{-1} : B \to A$ mit:

$$f(a) = b \iff f^{-1}(b) = a$$

  für alle $a \in A$ und alle $b \in B$.

- Gibt es eine Funktion $g : B \to A$ mit

$$\forall a \in A : g(f(a)) = a \quad \text{und} \quad \forall b \in B : f(g(b)) = b \ ,$$

  dann ist f bijektiv und g die Umkehrfunktion von f (d.h. $f^{-1} = g$).

Info

Ob mit f^{-1} eine Urbildmenge oder eine Umkehrfunktion gemeint ist, muss explizit hingeschrieben werden.

Komposition von Funktionen

Seien $f : A \to B$ und $g : B \to C$ beliebige Funktionen, dann nennt man die Funktion $g \circ f : A \to C$ mit

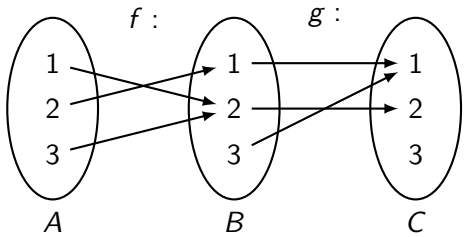
$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

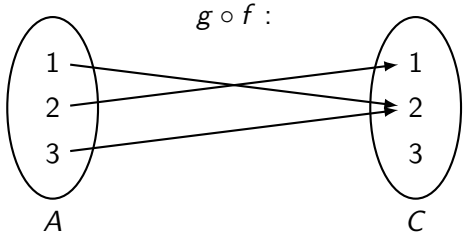
für alle $x \in A$ die Komposition oder Hintereinanderausführung von f und g.

Infos

- Wir nennen die Funktion $g \circ f$ auch „g nach f“, weil zuerst f und dann g angewendet wird.
- Eigentlich ist die Komposition von Funktionen nichts anderes als ein umgekehrtes Relationenprodukt $f \circ g$ wenn man f und g als Relationen betrachtet.

Beispiel





Quizfrage

Welche der folgenden zwei Aussagen gilt für die Urbildmenge einer Komposition von Funktionen?

$$(g \circ f)^{-1}(y) = g^{-1}(f^{-1}(y)) \tag{1}$$
$$(g \circ f)^{-1}(y) = f^{-1}(g^{-1}(y)) \tag{2}$$

Antwort

Die Aussage (2):

$$(g \circ f)^{-1}(y) = f^{-1}(g^{-1}(y))$$

Potenzen von Funktionen

Analog zu den Relationen definiert man:

$$f^n := \underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{n \text{ mal}}$$

Beispiel

Sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ x \mapsto 2x^2$. Dann gilt:

$$f^3(x) = (f \circ f \circ f)(x) = f(f(f(x))) = 2(2(2x^2)^2)^2 = 128x^8$$

Also: $f^3 : \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ x \mapsto 128x^8$

Partition der Definitionsmenge

Sei $f : A \to B$ eine Funktion. Die Relation $R \subseteq A \times A$ mit

$$R = \{(a_1, a_2) \in A \times A \,|\, f(a_1) = f(a_2)\}$$

ist eine Äquivalenzrelation und induziert folgende Partition P der Definitionsmenge A:

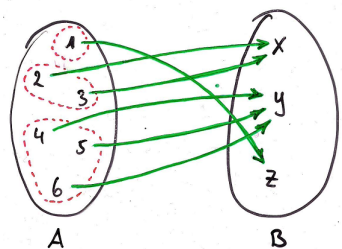
$$P = \left\{ f^{-1}(b) \,\middle|\, b \in B \right\}$$

Insbesondere gilt:

$$|A| = \sum_{b \in B} |f^{-1}(b)|$$

Beispiel

Sei $f : A \to B$ wie folgt:



Dann ist

$$P = \{f^{-1}(x), f^{-1}(y), f^{-1}(z)\} = \{\{2,3\},\{4,5,6\},\{1\}\}$$

eine Partition von A und es gilt:

$$|A| = |f^{-1}(x)| + |f^{-1}(y)| + |f^{-1}(z)| = 2 + 3 + 1 = 6$$

Kardinalität von Mengen

Mithilfe von Funktionen können wir den Begriff der Kardinalität formalisieren. Für beliebige Mengen A und B gelten folgende Definitionen:

- A und B sind gleich mächtig ($|A| = |B|$), wenn eine bijektive Funktion $f : A \to B$ existiert.
- B ist mindestens so mächtig wie A, wenn eine injektive Funktion $f : A \to B$ existiert.
- B ist mächtiger als A, wenn eine injektive Funktion $f : A \to B$ existiert, aber keine injektive Funktion $g : B \to A$.

Aus ihnen folgt der Satz von Schröder-Bernstein:

> *Wenn A mindestens so mächtig wie B ist und B mindestens so mächtig wie A, dann sind A und B gleich mächtig.*

Abzählbarkeit von Mengen

Eine beliebige Menge A heißt abzählbar, wenn A endlich ist oder $|A| = |\mathbb{N}|$ gilt. Andernfalls ist A überabzählbar.

Info

Intuitiv ist eine Menge abzählbar, wenn ihr Elemente so durchnummeriert werden können, dass kein Element übersprungen wird.

Permutationen

Sei A eine beliebige endliche Menge. Eine bijektive Funktion $p : A \to A$ wird Permutation über A genannt.

Permutationen kann man am einfachsten als Matrix (Tabelle) darstellen. Es gilt:

$$p = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ p(a_1) & p(a_2) & p(a_3) & \dots & p(a_n) \end{pmatrix}.$$

Beispiel

Sei p eine Permutation über $[4]$ mit:

$$p(1) = 3, \quad p(2) = 1, \quad p(3) = 2, \quad p(4) = 4.$$

In Matrixschreibweise:

$$p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Noch ein Beispiel

Sei p eine Permutation über [6] mit:

$$p(1) = 5, \quad p(2) = 2, \quad p(3) = 1, \quad p(4) = 6, \quad p(5) = 3, \quad p(6) = 4.$$

In Matrixschreibweise:

$$p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 2 & 1 & 6 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Infos

- die Identitätsabbildung id_A über A ist die einfachste Permutation. Es gilt:

$$\mathrm{id}_A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \end{pmatrix}$$

  Man schreibt oft einfach id statt id_A.

- Weil Permutationen bijektive Abbildungen sind, besitzt jede Permutation p eine Umkehrfunktion p^{-1} mit:

$$\forall x, y \in A : p(x) = y \iff p^{-1}(y) = x$$

Quizfragen

Gegeben seien folgende Permutationen p_1, p_2 und p_3 über $[6]$ in Matrixdarstellung:

1. $p_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 1 & 4 & 6 & 2 & 3 \end{pmatrix}$,
2. $p_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 6 & 2 \end{pmatrix}$,
3. $p_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 6 & 1 & 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$.

Wie sehen die Umkehrfunktionen p_1^{-1}, p_2^{-1} und p_3^{-1} in Matrixdarstellung aus?

Antworten

Einfach die Zeilen der Matrix vertauschen und nach der oberen Zeile sortieren!

1. $p_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 5 & 6 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.
2. $p_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 6 & 1 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$.
3. $p_3^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 4 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$.

Quizfragen

Was sind die Ergebnisse folgender Kompositionen in Matrixdarstellung?

1. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 6 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 2 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$,
2. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 5 & 4 & 2 & 6 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 4 & 6 & 5 & 3 \end{pmatrix}$,
3. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 2 & 3 & 1 & 6 & 4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 3 & 2 & 5 & 6 & 1 \end{pmatrix}$.

Antworten

1. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 5 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.
2. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 4 & 6 & 2 & 5 \end{pmatrix}$.
3. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 2 & 6 & 4 & 5 \end{pmatrix}$.

Themenübersicht

Themenübersicht

Syntax aussagenlogischer Formeln

Sei V eine Menge, die sog. Variablenmenge.

- true und false sind Formeln über V.
- Jede Variable $x \in V$ ist eine Formel über V.
- Ist F eine Formel über V, dann auch:

$$\neg F \quad \text{(Negation)}$$

- Sind F und G Formeln über V, dann auch:

$$\begin{array}{ll} (F \wedge G) & \text{(Konjunktion)} \\ (F \vee G) & \text{(Disjunktion)} \\ (F \rightarrow G) & \text{(Implikation)} \\ (F \leftrightarrow G) & \text{(Bikonditional)} \\ (F \otimes G) & \text{(Exklusives-Oder)} \\ (F \bar{\wedge} G) & \text{(NAND)} \\ (F \bar{\vee} G) & \text{(NOR)} \end{array}$$

Infos

- Man nennt true, false, $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, $\otimes$, $\bar{\wedge}$ und $\bar{\vee}$ Junktoren oder Konnektoren. Ihre Aritäten, die Anzahl der Teilfunktionen, die durch den jeweiligen Junktor verknüpft werden, sind:

Junktoren	Arität	
true, false	0	
$\neg$	1	(unär)
$\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, \otimes, \bar{\wedge}, \bar{\vee}$	2	(binär)

- Wir benutzen Klammern nur wenn es sein muss. Die Reihenfolge für die Bindungsstärke ist $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$. D.h. $\neg$ bindet am stärksten und $\rightarrow$ am schwächsten. Beispielsweise steht $F = p \rightarrow q \vee r \wedge s$ für $F = (p \rightarrow (q \vee (r \wedge s)))$. Wie stark $\otimes$, $\bar{\wedge}$ und $\bar{\vee}$ binden wurde nicht festgelegt.

Beispiele

Aussagenlogische Formeln sind:

$$(\neg r \to (p \wedge q)), \quad ((\neg p \leftrightarrow q) \leftrightarrow \neg r), \quad ((p \to \neg q) \vee (\neg r \wedge s)).$$

Diese dürfen wie folgt umgeschrieben werden:

$$\neg r \to p \wedge q, \quad \neg p \leftrightarrow q \leftrightarrow \neg r, \quad (p \to \neg q) \vee \neg r \wedge s.$$

Keine aussagenlogische Formeln sind:

$$p \neg q, \quad p(\neg \to) q, \quad p \to\to r, \quad \leftrightarrow q \wedge r, \quad pq \vee \neg p \neg q.$$

Quizfrage

Wie viele unterschiedliche aussagenlogische Formeln über $V = \{p\}$ gibt es?

Antwort

Unendlich viele! Zum Beispiel:

$$p, \neg p, \neg\neg p, \neg\neg\neg p, \neg\neg\neg\neg p, \ldots$$

An sich ist eine aussagenlogische Formel nichts anderes als ein Wort über dem Alphabet

$$\Sigma = V \cup \{\mathsf{true}, \mathsf{false}, \neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, \otimes, \bar{\wedge}, \bar{\vee}, (,)\}$$

und Wörter sind nur dann gleich, wenn sie auch gleich aussehen ;-)

Belegungen

- Eine Belegung β: $V \to \mathbb{B}$ ist eine Funktion die jeder Variable einer Variablenmenge V einen Wert aus $\mathbb{B} = \{0, 1\}$ zuordnet.
- Eine Belegung passt zu einer Formel F, wenn jede Variable aus F in V vorkommt, d.h. wenn $V(F) \subseteq V$ gilt.
- Eine Belegung ist minimal für F, wenn $V(F) = V$ gilt.

Infos

- Weil Belegungen Funktionen sind, bezeichnet man mit $\mathbb{B}^V$ die Menge aller Belegungen.
- Mit $V(F)$ wird hier die Menge aller Variablen in F bezeichnet.

Beispiel

Sei $V = \{p, q\}$. Dann gibt es folgende 4 Belegungen $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3 \colon V \to \mathbb{B}$:

$$\beta_0 \colon p \mapsto 0, q \mapsto 0$$
$$\beta_1 \colon p \mapsto 0, q \mapsto 1$$
$$\beta_2 \colon p \mapsto 1, q \mapsto 0$$
$$\beta_3 \colon p \mapsto 1, q \mapsto 1$$

Quizfragen

Sei $V = \{p, q, r, s\}$ und $\beta : V \to \mathbb{B}$ mit $p \mapsto 0, q \mapsto 1, r \mapsto 0, s \mapsto 1$. Zu welchen der folgenden Formeln $F_1, \ldots, F_5$ passt β? Für welche ist β minimal?

1. $F_1 = ((p \wedge q) \to (r \leftrightarrow s))$
2. $F_2 = (p \leftrightarrow q)$
3. $F_3 = ((r \leftrightarrow s) \vee t)$
4. $F_4 = \mathsf{true}$
5. $F_5 = (((\neg p \wedge \neg q) \wedge \neg r) \wedge \neg s)$

Antworten

1. β passt zu F_1 und ist minimal.
2. β passt zu F_2, ist aber nicht minimal.
3. β passt nicht zu F_3 und ist also nicht minimal.
4. β passt zu F_4, ist aber nicht minimal.
5. β passt zu F_5 und ist minimal.

Quizfrage

Wie viele unterschiedliche Belegungen gibt es für Formeln über V mit $|V| = n$?

Antwort

Jede Belegung ist eine Funktion von der Menge der Variablen V nach $\mathbb{B} = \{0, 1\}$. Aus dem Abschnitt für Funktionen wissen wir, dass die Menge B^A der Funktionen $f : A \to B$ genau

$$\left|B^A\right| = |B|^{|A|}$$

verschiedene Funktionen hat. Wegen $|V| = n$ und $|\mathbb{B}| = 2$ gibt es also

$$\left|\mathbb{B}^V\right| = |\mathbb{B}|^{|V|} = 2^n$$

verschiedene Belegungen.

Semantik Aussagenlogischer Formeln

Die Semantik $[F]$ einer aussagenlogischer Formel F mit Variablen aus V ist eine Funktion

$$[F] : \mathbb{B}^V \to \mathbb{B},$$

wobei $\mathbb{B}^V$ wieder die Menge aller Belegungen ist.

Für alle Belegungen β gilt folgende induktive Definition:

- $[\text{true}](\beta) = 1$ und $[\text{false}](\beta) = 0$.
- Für jede Variable $x \in V$ gilt $[x](\beta) = \beta(x)$.
- Ist $[F]$ die Semantik einer Formel F, dann gilt:

$$[\neg F](\beta) \quad = \quad \begin{cases} 1, & \text{falls } [F](\beta) = 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

- Sind $[F]$ und $[G]$ die Semantiken zweier Formeln F und G, dann gilt:

$$
\begin{aligned}
[F \wedge G](\beta) &= \begin{cases} 1, & \text{falls } [F](\beta) = 1 \text{ und } [G](\beta) = 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \\
[F \vee G](\beta) &= \begin{cases} 1, & \text{falls } [F](\beta) = 1 \text{ oder } [G](\beta) = 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \\
[F \rightarrow G](\beta) &= \begin{cases} 1, & \text{falls } [F](\beta) = 0 \text{ oder } [G](\beta) = 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \\
[F \leftrightarrow G](\beta) &= \begin{cases} 1, & \text{falls } [F](\beta) = [G](\beta) \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \\
[F \otimes G](\beta) &= \begin{cases} 1, & \text{falls } [F](\beta) \neq [G](\beta) \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \\
[F \barwedge G](\beta) &= \begin{cases} 1, & \text{falls } [F](\beta) = 0 \text{ oder } [G](\beta) = 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \\
[F \barvee G](\beta) &= \begin{cases} 1, & \text{falls } [F](\beta) = 0 \text{ und } [G](\beta) = 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}
\end{aligned}
$$

Semantik aussagenlogischer Formeln als Tabellen

Für den unären Junktor $\neg$ gilt:

F	$\neg F$
0	1
1	0

Für die binären Junktoren $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, $\otimes$, $\barwedge$ und $\barvee$ gilt:

F	G	$F \wedge G$	$F \vee G$	$F \rightarrow G$	$F \leftrightarrow G$	$F \otimes G$	$F \barwedge G$	$F \barvee G$
0	0	0	0	1	1	0	1	1
0	1	0	1	1	0	1	1	0
1	0	0	1	0	0	1	1	0
1	1	1	1	1	1	0	0	0

Rezept

Frage: Wie findet man die Semantik einer Formel F?

Methode:

1. Fülle die Wahrheitstafel für F mit Hilfe der Tabellen aus.
2. Lese die Semantik an der entsprechenden Spalte der Wahrheitstafel ab.

Beispiel

Aufgabe: Bestimmen Sie die Semantik $[F]$ folgender Formel F über $V = \{p, q, r\}$:

$$F = (q \vee r) \rightarrow \neg(p \leftrightarrow \neg r).$$

Lösung: ,
Erstelle eine leere Wahrheitstafel für $[F]$.

p	q	r	$(q \vee r) \rightarrow \neg (p \leftrightarrow \neg r)$
0	0	0	
0	0	1	
0	1	0	
0	1	1	
1	0	0	
1	0	1	
1	1	0	
1	1	1	

Beispiel

Aufgabe: Bestimme die Semantik $[F]$ folgender Formel F über $V = \{p, q, r\}$:

$$F = (q \vee r) \rightarrow \neg(p \leftrightarrow \neg r).$$

Lösung: ,
Fülle die Spalten für $[p], [q], [r]$ und $[\neg r]$ aus.

p	q	r	$(q$	$\vee$	$r)$	$\rightarrow$	$\neg$	$(p$	$\leftrightarrow$	$\neg r)$
0	0	0	0		0			0		1
0	0	1	0		1			0		0
0	1	0	1		0			0		1
0	1	1	1		1			0		0
1	0	0	0		0			1		1
1	0	1	0		1			1		0
1	1	0	1		0			1		1
1	1	1	1		1			1		0

Beispiel

Aufgabe: Bestimme die Semantik $[F]$ folgender Formel F über $V = \{p, q, r\}$:

$$F = (q \vee r) \rightarrow \neg(p \leftrightarrow \neg r).$$

Lösung: ,
Fülle die Spalten für $[(q \vee r)]$ und $[(p \leftrightarrow \neg r)]$ aus.

p	q	r	$(q$	$\vee$	$r)$	$\rightarrow$	$\neg$	$(p$	$\leftrightarrow$	$\neg r)$
0	0	0	0	0	0			0	0	1
0	0	1	0	1	1			0	1	0
0	1	0	1	1	0			0	0	1
0	1	1	1	1	1			0	1	0
1	0	0	0	0	0			1	1	1
1	0	1	0	1	1			1	0	0
1	1	0	1	1	0			1	1	1
1	1	1	1	1	1			1	0	0

Beispiel

Aufgabe: Bestimme die Semantik $[F]$ folgender Formel F über $V = \{p, q, r\}$:

$$F = (q \vee r) \rightarrow \neg(p \leftrightarrow \neg r).$$

Lösung: ,
Fülle die Spalte für $[\neg(p \leftrightarrow \neg r)]$ aus.

p	q	r	$(q$	$\vee$	$r)$	$\rightarrow$	$\neg$	$(p$	$\leftrightarrow$	$\neg r)$
0	0	0	0	0	0		1	0	0	1
0	0	1	0	1	1		0	0	1	0
0	1	0	1	1	0		1	0	0	1
0	1	1	1	1	1		0	0	1	0
1	0	0	0	0	0		0	1	1	1
1	0	1	0	1	1		1	1	0	0
1	1	0	1	1	0		0	1	1	1
1	1	1	1	1	1		1	1	0	0

Beispiel

Aufgabe: Bestimme die Semantik $[F]$ folgender Formel F über $V = \{p, q, r\}$:

$$F = (q \vee r) \rightarrow \neg(p \leftrightarrow \neg r).$$

Lösung: ,
Fülle die Spalte für $[(q \vee r) \rightarrow \neg(p \leftrightarrow \neg r)]$ also für $[F]$ aus.

p	q	r	$(q$	$\vee$	$r)$	$\rightarrow$	$\neg$	$(p$	$\leftrightarrow$	$\neg r)$
0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	1
0	0	1	0	1	1	0	0	0	1	0
0	1	0	1	1	0	1	1	0	0	1
0	1	1	1	1	1	0	0	0	1	0
1	0	0	0	0	0	1	0	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1	1	1	0	0
1	1	0	1	1	0	0	0	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0

Beispiel

Aufgabe: Bestimme die Semantik $[F]$ folgender Formel F über $V = \{p, q, r\}$:

$$F = (q \vee r) \rightarrow \neg(p \leftrightarrow \neg r).$$

Lösung: ,
Die Semantik $[F]$ von F wäre dann formal:

$$[F](p \mapsto 0, q \mapsto 0, r \mapsto 0) = 1 \qquad [F](p \mapsto 1, q \mapsto 0, r \mapsto 0) = 1$$
$$[F](p \mapsto 0, q \mapsto 0, r \mapsto 1) = 0 \qquad [F](p \mapsto 1, q \mapsto 0, r \mapsto 1) = 1$$
$$[F](p \mapsto 0, q \mapsto 1, r \mapsto 0) = 1 \qquad [F](p \mapsto 1, q \mapsto 1, r \mapsto 0) = 0$$
$$[F](p \mapsto 0, q \mapsto 1, r \mapsto 1) = 0 \qquad [F](p \mapsto 1, q \mapsto 1, r \mapsto 1) = 1$$

So formal muss sie aber selten angegeben werden. Normalerweise reicht die Wahrheitstafel aus. :-)

Quizfragen

Sei $V = \{p, q, r\}$. Wie sehen die Wahrheitstafeln folgender aussagenlogischer Formeln über V aus?

1. $\neg q \vee \neg(p \to q)$
2. $((p \to q) \wedge (\neg q \leftarrow \neg p)) \vee (p \wedge q)$,
3. $((p \to q) \to r) \leftrightarrow (p \to (q \to r))$,
4. $((p \vee q) \leftrightarrow (p \vee r)) \leftrightarrow (\neg p \wedge (\neg q \leftrightarrow r))$,
5. $((p \vee (q \leftrightarrow r)) \leftrightarrow ((p \leftrightarrow q) \vee (p \leftrightarrow r))$.

Antworten

1.

p	q	$\neg q$	$\vee$	$\neg$	$(p$	$\rightarrow$	$q)$
0	0	1	1	0	0	1	0
0	1	0	0	0	0	1	1
1	0	1	1	1	1	0	0
1	1	0	0	0	1	1	1

2.

p	q	$((p$	$\rightarrow$	$q)$	$\wedge$	$(\neg q$	$\leftarrow$	$\neg p))$	$\vee$	$(p$	$\wedge$	$q)$
0	0	0	1	0	1	1	1	1	1	0	0	0
0	1	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	1
1	0	1	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1	0	1	0	1	1	1	1

3.

p	q	r	$((p$	$\rightarrow$	$q)$	$\rightarrow$	$r)$	$\leftrightarrow$	$(p$	$\rightarrow$	$(q$	$\rightarrow$	$r))$
0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	1	0
0	0	1	0	1	0	1	1	1	0	1	0	1	1
0	1	0	0	1	1	0	0	0	0	1	1	0	0
0	1	1	0	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0	1	0	1	1	1	0	1	0
1	0	1	1	0	0	1	1	1	1	1	0	1	1
1	1	0	1	1	1	0	0	1	1	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

4.

p	q	r	$((p$	$\vee$	$q)$	$\leftrightarrow$	$(p$	$\vee$	$r))$	$\leftrightarrow$	$(\neg$	p	$\wedge$	$(\neg$	q	$\leftrightarrow$	$r))$
0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0	1	1	0	1	0	1	1	0	1	1
0	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	1	0	1	0	1	1	0
0	1	1	0	1	1	1	0	1	1	0	1	0	0	0	1	0	1
1	0	0	1	1	0	1	1	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0
1	0	1	1	1	0	1	1	1	1	0	0	1	0	1	0	1	1
1	1	0	1	1	1	1	1	1	0	0	0	1	0	0	1	1	0
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	0	0	1	0	1

5.

p	q	r	$((p$	$\vee$	$(q$	$\leftrightarrow$	$r))$	$\leftrightarrow$	$((p$	$\leftrightarrow$	$q)$	$\vee$	$(p$	$\leftrightarrow$	$r))$
0	0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0
0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1
0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	1	0	1	0
0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0	1	0	0	0	1
1	0	0	1	1	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0
1	0	1	1	1	0	0	1	1	1	0	0	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Quizfrage

Wie viele unterschiedliche Semantiken gibt es für Formeln über V mit $|V| = n$?

Antwort

Jede Semantik $[F]$ ist eine Funktion

$$[F] : \mathbb{B}^V \to \mathbb{B}$$

von der Menge $\mathbb{B}^V$ aller Belegungen nach $\mathbb{B} = \{0, 1\}$. Somit bezeichnet $\mathbb{B}^{\mathbb{B}^V}$ die Menge aller möglichen Semantiken für Formeln über V. (Das sieht sehr seltsam aus, ich weiß!) Also gibt es

$$\left|\mathbb{B}^{\mathbb{B}^V}\right| = |\mathbb{B}|^{|\mathbb{B}|^{|V|}} = 2^{2^n}$$

verschiedene Semantiken.

Beispiel

Für Formeln ohne Variablen gibt es folgende $2^{2^0} = 2$ mögliche Semantiken:

f_1	f_2
0	1

Noch ein Beispiel

Für Formeln mit einer Variable gibt es folgende $2^{2^1} = 4$ mögliche Semantiken:

p	f_1	f_2	f_3	f_4
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

Und noch ein Beispiel

Für Formeln mit zwei Variablen gibt es folgende $2^{2^2} = 16$ mögliche Semantiken:

p	q	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}	f_{16}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Ein letztes Beispiel

Für Formeln mit drei Variablen gibt es $2^{2^3} = 256$ mögliche Semantiken.

Hier hört der Spaß auf ...

Quizfrage

Wir betrachten wieder die Menge aller 16 möglichen Semantiken für Formeln mit zwei Variablen:

p	q	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}	f_{16}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Welche Semantiken haben folgende aussagenlogische Formeln?

false	true	p	$\neg p$
q	$\neg q$	$p \wedge q$	$p \bar{\wedge} q$
$p \vee q$	$p \bar{\vee} q$	$p \leftrightarrow q$	$p \otimes q$
$p \rightarrow q$	$\neg(p \rightarrow q)$	$q \rightarrow p$	$\neg(q \rightarrow p)$

Antwort

p	q	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}	f_{16}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

$[\text{false}] = f_1$ $[\text{true}] = f_{16}$ $[p] = f_4$ $[\neg p] = f_{13}$

$[q] = f_6$ $[\neg q] = f_{11}$ $[p \wedge q] = f_2$ $[p \barwedge q] = f_{15}$

$[p \vee q] = f_8$ $[p \barvee q] = f_9$ $[p \leftrightarrow q] = f_{10}$ $[p \otimes q] = f_7$

$[p \to q] = f_{14}$ $[\neg(p \to q)] = f_3$ $[q \to p] = f_{12}$ $[\neg(q \to p)] = f_5$

Eigenschaften aussagenlogischer Formeln

Sei F eine aussagenlogische Formel. Dann gilt:

$$\begin{array}{lll} F \text{ erfüllbar} & :\Longleftrightarrow & \text{es gibt eine zu } F \text{ passende Belegung } \beta \text{ mit } [F](\beta) = 1, \\ F \text{ gültig} & :\Longleftrightarrow & \text{für alle zu } F \text{ passende Belegungen } \beta \text{ gilt } [F](\beta) = 1. \end{array}$$

Infos

- Entsprechend sehen die Negationen aus:

$$\begin{array}{lll} F \text{ nicht erfüllbar} & \Longleftrightarrow & \text{für alle zu } F \text{ passende Belegungen } \beta \text{ gilt } [F](\beta) = 0, \\ F \text{ nicht gültig} & \Longleftrightarrow & \text{es gibt eine zu } F \text{ passende Belegung } \beta \text{ mit } [F](\beta) = 0. \end{array}$$

- Eine nicht erfüllbare Formel wird auch unerfüllbar oder Widerspruch genannt.
- Eine gültige Formel wird auch allgemeingültig oder Tautologie genannt.
- Eine nicht gültige Formel wird auch falsifizierbar genannt.

Beispiel

Sei $V = \{p, q, r\}$ und F wieder folgende aussagenlogische Formel über V:

$$F = (q \vee r) \rightarrow \neg(p \leftrightarrow \neg r).$$

p	q	r	$(q$	$\vee$	$r)$	$\rightarrow$	$\neg$	$(p$	$\leftrightarrow$	$\neg r)$
0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	1
0	0	1	0	1	1	0	0	0	1	0
0	1	0	1	1	0	1	1	0	0	1
0	1	1	1	1	1	0	0	0	1	0
1	0	0	0	0	0	1	0	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1	1	1	0	0
1	1	0	1	1	0	0	0	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0

- F ist erfüllbar, da z.B. $[F](p \mapsto 0, q \mapsto 0, r \mapsto 0) = 1$.
- F ist nicht gültig, da z.B. $[F](p \mapsto 0, q \mapsto 0, r \mapsto 1) = 0$.

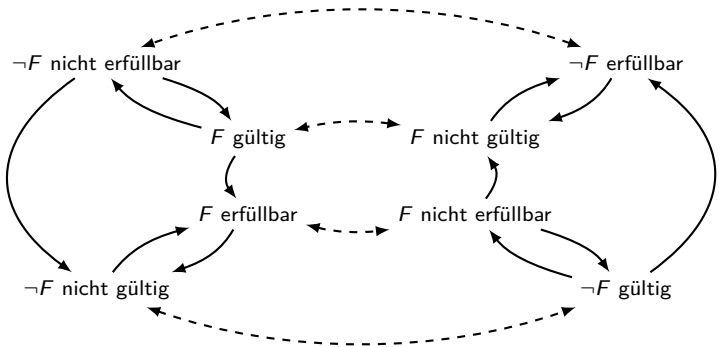
Quizfrage

Welche der folgenden Implikationen gelten für jede aussagenlogische Formel F?

1.	F gültig	$\Longrightarrow$	F erfüllbar
2.	F gültig	$\Longrightarrow$	$\neg F$ nicht erfüllbar
3.	F gültig	$\Longrightarrow$	$\neg F$ nicht gültig
4.	F erfüllbar	$\Longrightarrow$	F gültig
5.	F erfüllbar	$\Longrightarrow$	$\neg F$ nicht erfüllbar
6.	F erfüllbar	$\Longrightarrow$	$\neg F$ nicht gültig
7.	F nicht gültig	$\Longrightarrow$	F nicht erfüllbar
8.	F nicht gültig	$\Longrightarrow$	$\neg F$ gültig
9.	F nicht gültig	$\Longrightarrow$	$\neg F$ erfüllbar
10.	F nicht erfüllbar	$\Longrightarrow$	F nicht gültig
11.	F nicht erfüllbar	$\Longrightarrow$	$\neg F$ gültig
12.	F nicht erfüllbar	$\Longrightarrow$	$\neg F$ erfüllbar

Antwort

Es gelten alle Implikationen außer die 4, die 5, die 7 und die 8. Folgendes Bild fasst das Ergebnis dieser Quizfrage zusammen.



Gestrichelte Pfeile stellen Negationen und normale Pfeile Implikationen dar.

Themenübersicht

Logische Äquivalenz $\equiv$

Sei V eine beliebige Menge. Für beliebige aussagenlogische Formeln F und G über V gilt $F \equiv G$ genau dann, wenn für jede Belegung $\beta : V \to \mathbb{B}$ gilt:

$$[F](\beta) = 1 \text{ genau dann, wenn } [G](\beta) = 1.$$

In kompakter Schreibweise heißt das:

$$F \equiv G \quad :\Longleftrightarrow \quad (\forall \beta \in \mathbb{B}^V : [F](\beta) = 1 \Longleftrightarrow [G](\beta) = 1) \ .$$

Infos

- $\equiv$ ist nichts anderes als eine Relation über aussagenlogische Formeln.
- Für $F \equiv G$ sagen wir „F und G sind äquivalent“.
- Damit $F \equiv G$ gilt müssen F und G nicht unbedingt genau dieselben Variablen besitzen.
- Auf Folie 482 sind wichtige Aussagen zur logischen Äquivalenz aufgelistet.

Beispiel

Für $F = ((\neg p \vee q) \to (p \wedge q))$ und $G = ((r \to p) \wedge (\neg r \to p))$ gilt $F \equiv G$:

p	q	r	$((\neg p$	$\vee$	$q)$	$\to$	$(p$	$\wedge$	$q))$	$((r$	$\to$	$p)$	$\wedge$	$(\neg r$	$\to$	$p))$
0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0
0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0
0	1	0	1	1	1	0	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0
0	1	1	1	1	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	0
1	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	1	1	1	1	1	1
1	0	1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	1	1	0	1	1
1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1
1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1

Die Formel $(F \leftrightarrow G)$ ist also gültig.

Nicht verwechseln!

- „$\leftrightarrow$“ ist ein logischer Junktor, d.h. er ist ein Teil von aussagenlogischen Formeln. Sind F und G Formeln, dann auch $F \leftrightarrow G$. Insbesondere besitzt diese auch eine Semantik.
- „$\equiv$“ beschreibt das Verhältnis zwischen zwei Formeln, d.h. es handelt sich um eine Relation über aussagenlogische Formeln mit Eigenschaften wie z.B. reflexiv. Damit man $F \equiv G$ schreiben darf, müssen F und G Formeln sein. $F \equiv G$ ist aber an sich, im Gegensatz zu $F \leftrightarrow G$, keine Formel!
- „$\Longleftrightarrow$“ ist weder ein logischer Junktor noch eine Relation. Es ist nur eine Abkürzung für „genau dann, wenn“. Dieses Symbol gehört zur logischen Metaebene. Damit man $A \Longleftrightarrow B$ schreiben darf, müssen A und B irgendwelche Aussagen sein und keine aussagenlogische Formeln.

Quizfrage

Welche Eigenschaften besitzt die homogene Relation $\equiv$ über aussagenlogische Formeln?

Antwort

$\equiv$ ist reflexiv, symmetrisch und transitiv, also eine Äquivalenzrelation.

Info: Bei n Variablen hat die durch $\equiv$ induzierte Partition genau 2^{2^n} Äquivalenzklassen, eine für jede Semantik ;-)

Äquivalenzregeln

Seien F, G und H aussagenlogische Formeln. Ein paar nützliche Äquivalenzregeln sind:

$F \wedge \text{true} \equiv F$	$F \vee \text{false} \equiv F$	(Identität)
$F \vee \text{true} \equiv \text{true}$	$F \wedge \text{false} \equiv \text{false}$	(Dominanz)
$F \vee F \equiv F$	$F \wedge F \equiv F$	(Idempotenz)
$\neg\neg F \equiv F$		(Doppelte Negation)
$F \vee \neg F \equiv \text{true}$	$F \wedge \neg F \equiv \text{false}$	(Triv. Taut./Kontr.)
$F \vee G \equiv G \vee F$	$F \wedge G \equiv G \wedge F$	(Kommutativität)
$(F \vee G) \vee H \equiv F \vee (G \vee H)$	$(F \wedge G) \wedge H \equiv F \wedge (G \wedge H)$	(Assoziativität)
$F \vee (G \wedge H) \equiv (F \vee G) \wedge (F \vee H)$	$F \wedge (G \vee H) \equiv (F \wedge G) \vee (F \wedge H)$	(Distributivität)
$\neg(F \wedge G) \equiv \neg F \vee \neg G$	$\neg(F \vee G) \equiv \neg F \wedge \neg G$	(De Morgan)
$F \otimes G \equiv (F \vee G) \wedge \neg(F \wedge G)$	$F \otimes G \equiv (F \wedge \neg G) \vee (G \wedge \neg F)$	(Exklusives-Oder)
$F \to G \equiv \neg F \vee G$	$F \vee G \equiv \neg F \to G$	(Implikation)
$F \leftrightarrow G \equiv (F \to G) \wedge (G \to F)$	$F \leftrightarrow G \equiv \neg(F \otimes G)$	(Bikonditional)
$F \barwedge G \equiv \neg(F \wedge G)$	$F \barvee G \equiv \neg(F \vee G)$	(NAND und NOR)
$F \vee (F \wedge G) \equiv F$	$F \wedge (F \vee G) \equiv F$	(Absorption)

Info

Man kann diese Regeln beweisen, in dem man die Teilformeln F, G und H als Variablen betrachtet, das $\equiv$-Symbol durch ein $\leftrightarrow$ ersetzt und die Gültigkeit der entstehenden Formel mit einer Wahrheitstafel beweist.

Beispielsweise gilt für die erste Regel von De Morgan:

F	G	$\neg$	$(F$	$\wedge$	$G)$	$\leftrightarrow$	$(\neg F$	$\vee$	$\neg G)$
0	0	1	0	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	0	1	1	1	1	0
1	0	1	1	0	0	1	0	1	1
1	1	0	1	1	1	1	0	0	0

Diese Methode kann für beliebige Formeln angewendet werden (wurde in der Vorlesung gesagt, aber nicht bewiesen).

Quizfragen

Welche der folgenden Äquivalenzen sind richtig?

1. $(p \to q) \equiv (\neg p \to \neg q)$,
2. $(p \to q) \equiv (\neg q \to \neg p)$,
3. $\neg(p \to q) \equiv (\neg p \to \neg q)$,
4. $\neg(p \to q) \equiv (\neg q \to \neg p)$,
5. $(p \to q) \equiv (\neg p \vee q)$,
6. $(p \to q) \equiv (p \vee \neg q)$,
7. $\neg(p \to q) \equiv (\neg p \wedge q)$,
8. $\neg(p \to q) \equiv (p \wedge \neg q)$.

Antworten

1. Falsch.
2. Richtig.
3. Falsch.
4. Falsch.
5. Richtig.
6. Falsch.
7. Falsch.
8. Richtig.

Info

Um die Äquivalenz $F \equiv G$ zweier Formeln F und G zu zeigen, haben wir zwei Methoden kennengelernt:

1. Die Wahrheitstafel für $F \leftrightarrow G$ aufstellen und überprüfen, ob die Formel eine Tautologie ist.
2. Mithilfe der Äquivalenzregeln Formeln $F_1, F_2, \ldots, F_n$ finden mit:

$$F \equiv F_1 \equiv F_2 \equiv \ldots \equiv F_n \equiv G.$$

Wahrheitstafeln sind einfach und führen automatisch zum Ziel. Leider hat eine Formel mit n Variablen eine Wahrheitstafel mit 2^n Zeilen. Für $n \leq 3$ Variablen sind Wahrheitstafeln sehr angenehm. Für $n \geq 4$ Variablen sind Äquivalenzumformungen besser.

Themenübersicht

Themenübersicht

Literale

Ein Literal ist eine Variable oder die Negation einer Variable.

Beispiel

Die Menge aller Literale über $V = \{p, q, r\}$ ist $\{p, q, r, \neg p, \neg q, \neg r\}$.

Disjunktionen

Eine Disjunktion F von Formeln $F_1, \ldots, F_n$ ist eine Formel der Form $F = F_1 \vee \ldots \vee F_n$.

Beispiel

$F = (q \leftrightarrow (p \vee r)) \vee (r \rightarrow q) \vee p \vee (p \wedge q)$ ist eine Disjunktion.

Info

Weil $\vee$ assoziativ ist, ist es egal wie die einzelnen Formeln $F_1, \ldots, F_n$ geklammert werden. Deswegen dürfen wir auch die Klammern einfach weglassen.

Konjunktionen

Eine Konjunktion F von Formeln $F_1, \ldots, F_n$ ist eine Formel der Form $F = F_1 \wedge \ldots \wedge F_n$.

Beispiel

$F = (p \to q) \wedge q \wedge (q \leftrightarrow r) \wedge (p \vee q \vee s)$ ist eine Konjunktion.

Info

Weil $\wedge$ assoziativ ist, ist es egal wie die einzelnen Formeln $F_1, \ldots, F_n$ geklammert werden. Deswegen dürfen wir auch die Klammern einfach weglassen.

Infos

- Die Disjunktion von Null Formeln (die „leere Disjunktion“) ist $F := \text{false}$.
- Die Konjunktion von Null Formeln (die „leere Konjunktion“) ist $F := \text{true}$.

Disjunktive Normalform

Sei V eine beliebige Menge.

- eine Formel über V heißt DNF-Klausel, falls sie eine Konjunktion von Literalen ist.
- Eine Formel über V in disjunktiver Normalform (DNF) ist eine Disjunktion von DNF-Klauseln.

Beispiel

Folgende Formel F über $V = \{p, q, r, s\}$ ist in DNF:

$$F = \underbrace{\underbrace{(\neg p \wedge r \wedge s)}_{\text{Konjunktion}} \vee \underbrace{(\neg q \wedge \neg s)}_{\text{Konjunktion}} \vee \underbrace{(p \wedge q \wedge \neg r \wedge s)}_{\text{Konjunktion}} \vee \underbrace{(\neg r \wedge s)}_{\text{Konjunktion}}}_{\textit{Disjunktion}}$$

Konjunktive Normalform

Sei V eine beliebige Menge.

- eine Formel über V heißt KNF-Klausel, falls sie eine Disjunktion von Literalen ist.
- Eine Formel über V in konjunktiver Normalform (KNF) ist eine Konjunktion von KNF-Klauseln.

Beispiel

Folgende Formel F über $V = \{p, q, r, s\}$ ist in KNF:

$$F = \underbrace{\underbrace{(\neg p \vee r \vee s)}_{\text{Disjunktion}} \wedge \underbrace{(\neg q \vee \neg s)}_{\text{Disjunktion}} \wedge \underbrace{(p \vee q \vee \neg r \vee s)}_{\text{Disjunktion}} \wedge \underbrace{(\neg r \vee s)}_{\text{Disjunktion}}}_{\textit{Konjunktion}}$$

Vollständige Normalformen

Eine Formel ist in vollständiger DNF oder KNF, falls alle Klauseln in ihr genau dieselben Variablen besitzen.

Beispiel

Sei $V = \{p, q, r\}$.

- Die Formel $F_1 = \neg p \vee (p \wedge q \wedge r)$ über V ist in nicht vollständiger DNF.
- Die Formel $F_2 = (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r)$ über V ist in vollständiger DNF.
- Die Formel $F_1 = (\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee r)$ über V ist in nicht vollständiger KNF.
- Die Formel $F_2 = (p \vee \neg q \vee \neg r) \wedge (p \vee q \vee r)$ über V ist in vollständiger KNF.

Rezept

Frage: Wie findet man eine zu einer gegebenen Formel F äquivalente Formel in vollständiger DNF bzw. KNF?

Methode: Zuerst stelle die Wahrheitstafel der Formel F auf. Dann:

DNF:

1. Wähle Zeilen mit Ergebnis 1.
2. Bilde für jede Zeile eine Konjunktion aller Variablen (mit „$\wedge$“), in der alle mit 0 belegten Variablen negiert sind und die anderen nicht.
3. Bilde eine Disjunktion aller Konjunktionen (mit „$\vee$“).

KNF:

1. Wähle Zeilen mit Ergebnis 0.
2. Bilde für jede Zeile eine Disjunktion aller Variablen (mit „$\vee$“), in der alle mit 1 belegten Variablen negiert sind und die anderen nicht.
3. Bilde eine Konjunktion aller Disjunktionen (mit „$\wedge$“).

Beispiel

Aufgabe: Sei F eine Formel über $\{p, q, r\}$ mit folgender Wahrheitstafel:

p	q	r	F
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

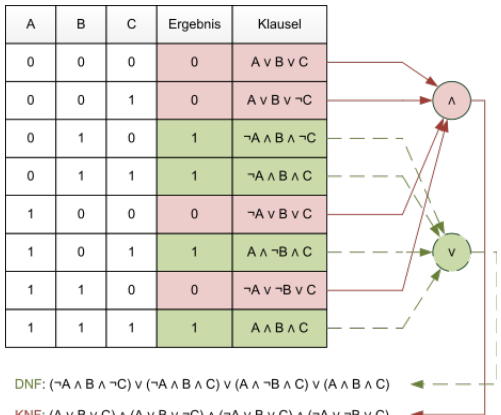
Finde eine zu F äquivalente Formel in vollständiger DNF und eine in vollständiger KNF.

Lösung:

$$\begin{aligned} F &\equiv (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge q \wedge r) && \text{(DNF)} \\ &\equiv (p \vee q \vee r) \wedge (\neg p \vee q \vee r) \wedge (\neg p \vee q \vee \neg r) && \text{(KNF)} \end{aligned}$$

Noch ein Beispiel

Dieses Beispiel habe ich von Wikipedia geklaut:



A	B	C	Ergebnis	Klausel
0	0	0	0	$A \vee B \vee C$
0	0	1	0	$A \vee B \vee \neg C$
0	1	0	1	$\neg A \wedge B \wedge \neg C$
0	1	1	1	$\neg A \wedge B \wedge C$
1	0	0	0	$\neg A \vee B \vee C$
1	0	1	1	$A \wedge \neg B \wedge C$
1	1	0	0	$\neg A \vee \neg B \vee C$
1	1	1	1	$A \wedge B \wedge C$

Quelle: `http://de.wikipedia.org/wiki/Disjunktive_Normalform`

Seien F, G und H aussagenlogische Formeln über $\{p, q, r\}$ mit folgenden Wahrheitstafeln:

p	q	r	F	G	H
0	0	0	0	0	1
0	0	1	0	1	0
0	1	0	0	0	0
0	1	1	1	1	0
1	0	0	1	1	0
1	0	1	1	0	1
1	1	0	0	1	1
1	1	1	1	1	1

1. Welche Formeln in vollständiger DNF bzw. KNF sind äquivalent zu F?
2. Welche Formeln in vollständiger DNF bzw. KNF sind äquivalent zu G?
3. Welche Formeln in vollständiger DNF bzw. KNF sind äquivalent zu H?

Antworten

1.

$$\begin{aligned} F &\equiv (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge r) && \text{(DNF)} \\ &\equiv (p \vee q \vee r) \wedge (p \vee q \vee \neg r) \wedge (p \vee \neg q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee r) && \text{(KNF)} \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} G &\equiv (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge q \wedge r) && \text{(DNF)} \\ &\equiv (p \vee q \vee r) \wedge (p \vee \neg q \vee r) \wedge (\neg p \vee q \vee \neg r) && \text{(KNF)} \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} H &\equiv (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge q \wedge r) && \text{(DNF)} \\ &\equiv (p \vee q \vee \neg r) \wedge (p \vee \neg q \vee r) \wedge (p \vee \neg q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee q \vee r) && \text{(KNF)} \end{aligned}$$

Quizfragen

Wie ist die Semantik (als Wahrheitstafel) folgender Formeln?

1. $F_1 = (\neg p \wedge \neg q) \vee (p \wedge \neg q) \vee (p \wedge q)$
2. $F_2 = (p \vee q) \wedge (p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee \neg q)$

Hinweis: Man braucht nicht die Wahrheitstafeln komplett auszufüllen, denn F_1 und F_2 sind in vollständiger DNF bzw. KNF.

Antworten

1.

p	q	F_1
0	0	1
0	1	0
1	0	1
1	1	1

2.

p	q	F_2
0	0	0
0	1	0
1	0	1
1	1	0

Ersetzen von Variablen

Sei V eine Variablenmenge und F eine KNF-Formel mit $p \in V_F$.

- $F[p \setminus \text{true}]$ bezeichnet die Formel, die entsteht, in dem jedem Vorkommnis von p in F durch true ersetzt wird.
- $F[p \setminus \text{false}]$ bezeichnet die Formel, die entsteht, in dem jedem Vorkommnis von p in F durch false ersetzt wird.

Nachdem eine Variable mit true oder false belegt wurde, kann die entstehende Formel mit folgenden Regeln vereinfacht werden:

$$\begin{array}{lll} F \wedge \text{true} \equiv F, & F \vee \text{true} \equiv \text{true}, & \neg\,\text{true} \equiv \text{false}, \\ F \wedge \text{false} \equiv \text{false}, & F \vee \text{false} \equiv F, & \neg\,\text{false} \equiv \text{true}\,. \end{array}$$

Beispiel

Sei F folgende KNF-Formel über $V = \{p, q, r, s\}$:

$$F = (\neg p \vee q \vee s) \wedge (p \vee \neg q \vee \neg s) \wedge (p \vee q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee \neg r \vee s).$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} F[p \setminus \text{true}] &\equiv (\cancel{\neg p} \vee q \vee s) \wedge \cancel{(p \vee \neg q \vee \neg s)} \wedge \cancel{(p \vee q \vee \neg r)} \wedge (\cancel{\neg p} \vee \neg r \vee s) \\ &\equiv (q \vee s) \wedge (\neg r \vee s) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} F[p \setminus \text{false}] &\equiv \cancel{(\neg p \vee q \vee s)} \wedge (\cancel{p} \vee \neg q \vee \neg s) \wedge (\cancel{p} \vee q \vee \neg r) \wedge \cancel{(\neg p \vee \neg r \vee s)} \\ &\equiv (\neg q \vee \neg s) \wedge (q \vee \neg r). \end{aligned}$$

Infos

- $F[p \setminus \text{true}]$ entspricht also F ohne Vorkommnisse von $\neg p$ und ohne Klauseln, die p enthalten.
- $F[p \setminus \text{false}]$ entspricht also F ohne Vorkommnisse von p und ohne Klauseln, die $\neg p$ enthalten.

Themenübersicht

Rezept

Frage: Wie überprüft man mit dem DPLL-Algorithmus, ob eine gegebene KNF-Formel F erfüllbar ist?

Methode: Führe den Algorithmus aus ;-)

1. Wenn $F = \{\}$ (d.h. $F = \text{true}$), dann antworte „erfüllbar“;
2. Wenn $F = \{\{\}\}$ (d.h. $F = \text{false}$), dann antworte „unerfüllbar“;
3. Sonst:
4. Wenn F eine Klausel $\{p\}$ enthält:
5. Führe den Algorithmus für $F[p \setminus \text{true}]$ aus;
6. Wenn F eine Klausel $\{\neg p\}$ enthält:
7. Führe den Algorithmus für $F[p \setminus \text{false}]$ aus;
8. Sonst wähle eine Variable $p \in V_F$ und:
9. Falls $F[p \setminus \text{true}]$ erfüllbar ist, antworte „erfüllbar“;
10. Falls $F[p \setminus \text{false}]$ erfüllbar ist, antworte „erfüllbar“;

Infos

- DPLL überprüft die Erfüllbarkeit einer KNF-Formel.
- KNF-Formeln werden als Mengen dargestellt. Zum Beispiel:

$$(\neg p \vee q \vee \neg r) \wedge q \wedge (r \vee \neg s) \quad \rightsquigarrow \quad \{\{\neg p, q, \neg r\}, \{q\}, \{r, \neg s\}\}$$

- Achtung mit der leeren Menge $\{\}$:

$$\begin{array}{lcll} \text{leere Klausel} & \hat{=} & \text{leere Disjunktion} & \hat{=} \quad \text{false} \\ \text{leere Formel} & \hat{=} & \text{leere Konjunktion} & \hat{=} \quad \text{true} \end{array}$$

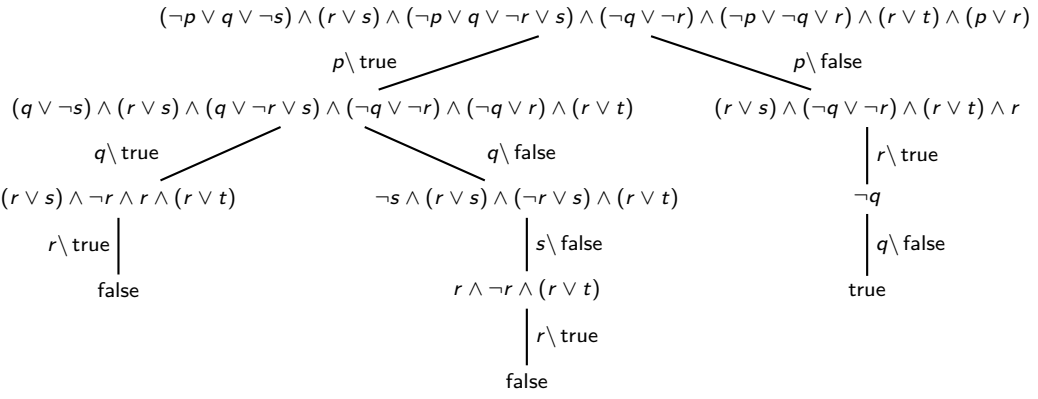
- Dieser Algorithmus wird in der Vorlesung „Algorithmus 2“ genannt. Entfernt man die one-literal rule (Zeilen 4-7), so bekommt man den „Algorithmus 1“ aus der Vorlesung.

Beispiel

Aufgabe: Überprüfe die Erfüllbarkeit folgender Formel mit dem DPLL-Algorithmus:

$$F = (\neg p \vee q \vee \neg s) \wedge (r \vee s) \wedge (\neg p \vee q \vee \neg r \vee s) \wedge (\neg q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee r) \wedge (r \vee t) \wedge (p \vee r).$$

Mögliche Lösung als Formeln:

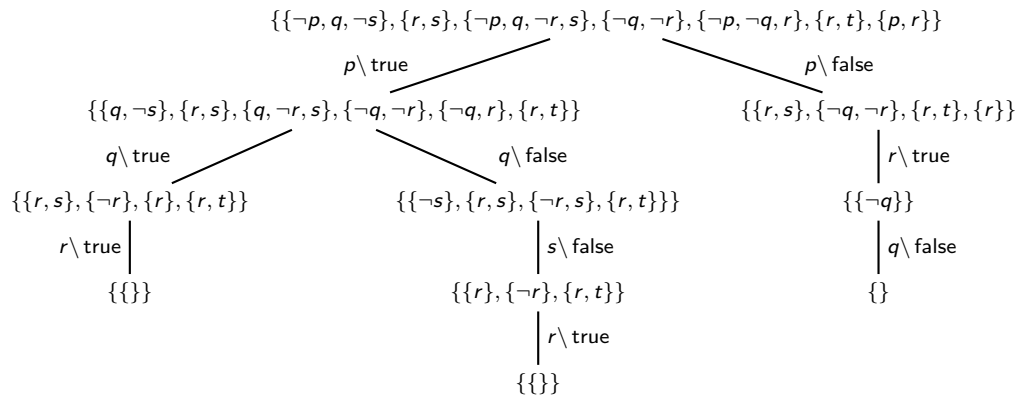


Jede Belegung β mit $p \mapsto 0$, $r \mapsto 1$ und $q \mapsto 0$ ist erfüllend.

Aufgabe: Überprüfe die Erfüllbarkeit folgender Formel mit dem DPLL-Algorithmus:

$$F = (\neg p \vee q \vee \neg s) \wedge (r \vee s) \wedge (\neg p \vee q \vee \neg r \vee s) \wedge (\neg q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee r) \wedge (r \vee t) \wedge (p \vee r).$$

Mögliche Lösung als Mengen:



Jede Belegung β mit $p \mapsto 0$, $r \mapsto 1$ und $q \mapsto 0$ ist erfüllend.

Infos

- Die leere Menge $\{\}$ stellt die leere Formel dar und $\{\{\}\}$ die Formel mit einer leeren Klausel, d.h.:

$$\{\} = \text{true}, \quad \text{aber} \quad \{\{\}\} = \text{false}\,.$$

- Kommt man auf eine Formel, die die leere Klausel enthält, so ist diese äquivalent zu false. Dann müssen wir zur letzten Verzweigung zurück gehen und von da aus weitermachen. Liefern alle Pfade false, so ist die Formel unerfüllbar.
- Bei DPLL ist die Lösung nicht immer eindeutig! Wir können die Reihenfolge, in der Variablen ersetzt werden, und den Wert, durch den sie ersetzt werden, selber wählen.
- Der Algorithmus hält, sobald die leere Menge zum ersten Mal gefunden wird.

Quizfragen

Gegeben sei folgende Formel:

$$F = ((q \wedge s) \rightarrow \neg r) \wedge (q \rightarrow s) \wedge (p \rightarrow q) \wedge ((p \wedge q) \rightarrow (r \vee \neg s)) \wedge (p \vee q).$$

1. Welche KNF-Formel ist äquivalent zu F?
2. Ist F erfüllbar?

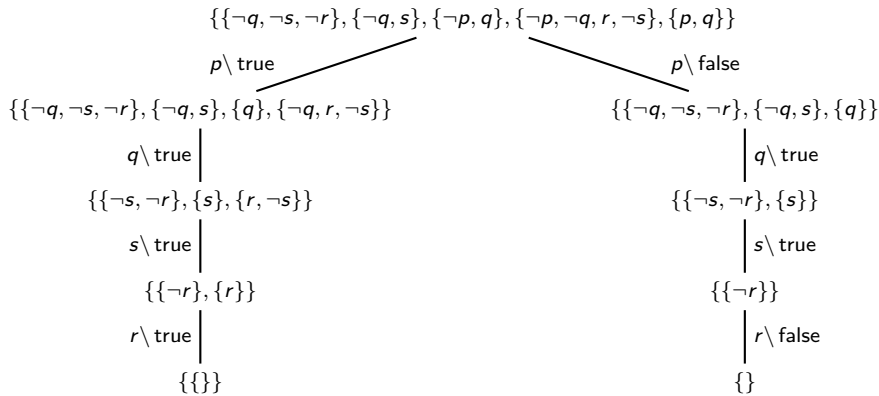
Hinweis: Benutze Äquivalenzregeln und DPLL.

Antworten

1. Äquivalenzumformungen:

$$
\begin{aligned}
F &= ((q \wedge s) \rightarrow \neg r) \wedge (q \rightarrow s) \wedge (p \rightarrow q) \wedge ((p \wedge q) \rightarrow (r \vee \neg s)) \wedge (p \vee q) \\
&\equiv (\neg(q \wedge s) \vee \neg r) \wedge (\neg q \vee s) \wedge (\neg p \vee q) \wedge (\neg(p \wedge q) \vee (r \vee \neg s)) \wedge (p \vee q) \\
&\equiv (\neg q \vee \neg s \vee \neg r) \wedge (\neg q \vee s) \wedge (\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee r \vee \neg s) \wedge (p \vee q).
\end{aligned}
$$

2. DPLL:


$\{\{\neg q, \neg s, \neg r\}, \{\neg q, s\}, \{\neg p, q\}, \{\neg p, \neg q, r, \neg s\}, \{p, q\}\}$
$p \setminus \text{true}$
$p \setminus \text{false}$
$\{\{\neg q, \neg s, \neg r\}, \{\neg q, s\}, \{q\}, \{\neg q, r, \neg s\}\}$
$\{\{\neg q, \neg s, \neg r\}, \{\neg q, s\}, \{q\}\}$
$q \setminus \text{true}$
$q \setminus \text{true}$
$\{\{\neg s, \neg r\}, \{s\}, \{r, \neg s\}\}$
$\{\{\neg s, \neg r\}, \{s\}\}$
$s \setminus \text{true}$
$s \setminus \text{true}$
$\{\{\neg r\}, \{r\}\}$
$\{\{\neg r\}\}$
$r \setminus \text{true}$
$r \setminus \text{false}$
$\{\{\}\}$
$\{\}$

Themenübersicht

Resolution

Sei F eine KNF-Formel und

$$(l_1 \vee \ldots \vee l_k \vee p) \quad \text{und} \quad (\neg p \vee l'_1 \vee \ldots \vee l'_m)$$

zwei Klauseln in F für irgendwelche Literale $l_1, \ldots, l_k, l'_1, \ldots, l'_m$ und eine Variable p.

Aus den Äquivalenzregeln wissen wir:

$$\begin{array}{lcl} (l_1 \vee \ldots \vee l_k \vee p) & \equiv & \neg(l_1 \vee \ldots \vee l_k) \rightarrow p \\ (\neg p \vee l'_1 \vee \ldots \vee l'_m) & \equiv & p \rightarrow (l'_1 \vee \ldots \vee l'_m) \end{array}$$

Aus diesen zwei Implikationen folgt sofort

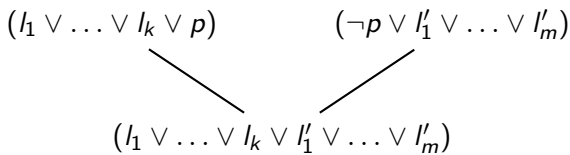
$$\neg(l_1 \vee \ldots \vee l_k) \rightarrow (l'_1 \vee \ldots \vee l'_m),$$

was äquivalent ist zur KNF-Klausel

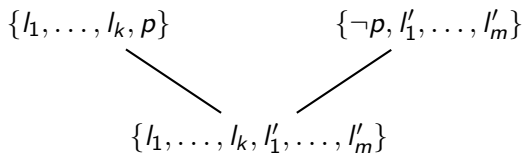
$$(l_1 \vee \ldots \vee l_k \vee l'_1 \vee \ldots \vee l'_m).$$

Die Klausel $(l_1 \vee \ldots \vee l_k \vee l'_1 \vee \ldots \vee l'_m)$ wird Resolvent genannt und kann in F hinzugefügt werden ohne die Semantik von F zu ändern.

Graphisch kann das wie folgt dargestellt werden:



In Mengendarstellung:



Rezept

Frage: Wie überprüft man mit Resolution, ob eine gegebene KNF-Formel F unerfüllbar ist?

Methode: Füge durch Resolution so viele Klauseln in F hinzu, bis $\{\}$ (bzw. false) als Resolvent vorkommt oder bis keine neue Klauseln entstehen können. Im ersten Fall ist die Formel unerfüllbar, im zweiten erfüllbar.

Beispiel

Aufgabe: Überprüfe die Unerfüllbarkeit folgender Formel mit dem Resolutionsverfahren:

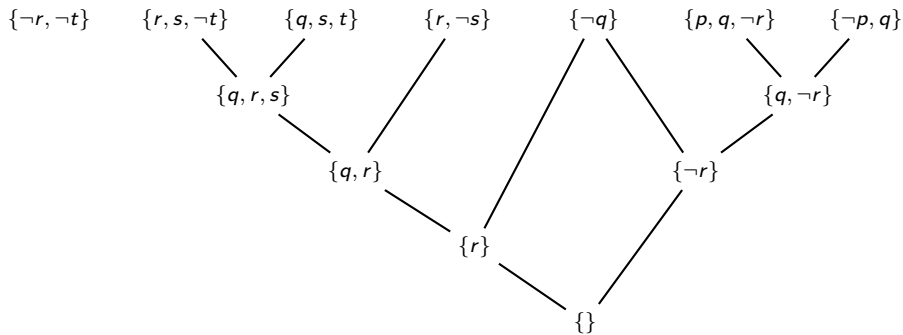
$$F = (\neg r \vee \neg t) \wedge (r \vee s \vee \neg t) \wedge (q \vee s \vee t) \wedge (r \vee \neg s) \wedge \neg q \wedge (p \vee q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee q).$$

Beispiel

Aufgabe: Überprüfe die Unerfüllbarkeit folgender Formel mit dem Resolutionsverfahren:

$$F = (\neg r \vee \neg t) \wedge (r \vee s \vee \neg t) \wedge (q \vee s \vee t) \wedge (r \vee \neg s) \wedge \neg q \wedge (p \vee q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee q).$$

Mögliche Lösung:



Infos

- Bei Resolution ist $\{\}$ (oft auch $\square$) nicht die leere Formel, sondern die leere Klausel. Bei Resolution werden die Mengenklammern ja weggelassen. D.h. hier ist, im Gegensatz zu DPLL, $\{\} = \text{false}$.
- Bei Resolution darf immer nur ein Literal als Resolvent benutzt werden. Aus $\{p, \neg q, r\}$ und $\{q, \neg r, s\}$ folgt beispielsweise nicht $\{p, s\}$!
- Klauseln dürfen mehrmals oder auch gar nicht benutzt werden. Die generierten Klauseln werden in die Formel hinzugefügt, d.h. sie ersetzen nicht die benutzten Klauseln.
- Möchte man die Gültigkeit einer DNF-Formel F überprüfen, so kann $\neg F$ mithilfe der De Morgansche Regeln ganz einfach in KNF gebracht werden. F ist dann gültig genau dann, wenn $\neg F$ unerfüllbar ist, z.B.:

$$F = (p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg r) \vee \neg r \qquad \rightsquigarrow \qquad \neg F \equiv (\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee r) \wedge r$$

Quizfragen

Gegeben sei folgende Formel:

$$F = (p \to r) \wedge q \wedge (q \to p) \wedge (q \to t) \wedge ((p \wedge r) \to s) \wedge (s \to t) \wedge ((s \wedge t) \to \text{false}).$$

1. Welche KNF-Formel ist äquivalent zu F?
2. Ist F unerfüllbar?

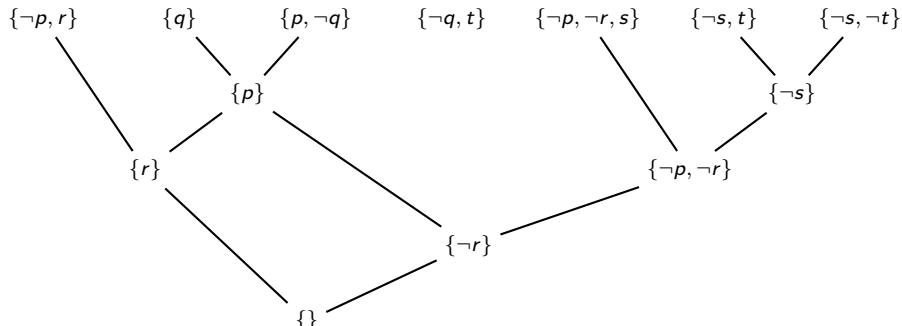
Hinweis: Benutze Äquivalenzregeln und Resolution.

Antworten

1. Äquivalenzumformungen:

$$
\begin{aligned}
F &= (p \to r) \land q \land (q \to p) \land (q \to t) \land ((p \land r) \to s) \land (s \to t) \land ((s \land t) \to \text{false}) \\
&\equiv (\neg p \lor r) \land q \land (\neg q \lor p) \land (\neg q \lor t) \land (\neg(p \land r) \lor s) \land (\neg s \lor t) \land (\neg(s \land t) \lor \text{false}) \\
&\equiv (\neg p \lor r) \land q \land (p \lor \neg q) \land (\neg q \lor t) \land (\neg p \lor \neg r \lor s) \land (\neg s \lor t) \land (\neg s \lor \neg t)
\end{aligned}
$$

2. Mögliche Resolution:



Info

Sowohl mit DPLL als auch mit Resolution kann man entscheiden, ob eine KNF-Formel F erfüllbar oder unerfüllbar ist.

- DPLL ist besser geeignet, um F auf Erfüllbarkeit zu testen (effizient und liefert erfüllende Belegung).
- Resolution ist besser geeignet, um F auf Unerfüllbarkeit zu testen (effizient und liefert einen Beweis).

Themenübersicht

Logische Inferenz $\models$

Sei V eine beliebige Menge. Für beliebige aussagenlogische Formeln F und G über V gilt $F \models G$ genau dann, wenn für jede Belegung $\beta : V \to \mathbb{B}$ gilt:

$$\text{Wenn } [F](\beta) = 1, \text{ dann } [G](\beta) = 1.$$

In kompakter Schreibweise heißt das:

$$F \models G \quad :\Longleftrightarrow \quad (\forall \beta \in \mathbb{B}^V : [F](\beta) = 1 \Longrightarrow [G](\beta) = 1) \ .$$

Infos

- $\models$ ist, wie $\equiv$, nichts anderes als eine Relation über aussagenlogische Formeln. Sie heißt Folgerungsrelation.
- Für $F \models G$ sagen wir „aus F folgt G“.
- Damit $F \models G$ gilt müssen F und G nicht unbedingt genau dieselben Variablen besitzen.
- Auf Folie 485 sind wichtige Aussagen zur logischen Äquivalenz aufgelistet.
- Für Inferenzen der Form $A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \models G$ schreiben wir oft $A_1, \ldots, A_n \models G$ oder $\{A_1, \ldots, A_n\} \models G$. Insbesondere definieren wir:

$$\models G \quad :\Longleftrightarrow \quad G \text{ ist gültig } .$$

Diese Definition macht Sinn, weil die leere Konjunktion als true definiert wurde und es gilt:

$$\text{true} \models G \iff (\text{true} \to G) \text{ ist gültig} \iff G \text{ ist gültig.}$$

Beispiel

Für $F = ((\neg p \vee q) \to (p \wedge q))$ und $G = ((r \to p) \to (\neg r \to p))$ gilt $F \models G$.

p	q	r	$((\neg p$	$\vee$	$q)$	$\to$	$(p$	$\wedge$	$q))$	$((r$	$\to$	$p)$	$\to$	$(\neg r$	$\to$	$p))$
0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0
0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	1	0	1	1	0	1	1
0	1	0	1	1	1	0	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0
0	1	1	1	1	1	0	0	0	1	1	0	0	1	0	1	0
1	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	1	1	1	1	1	1
1	0	1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	1	1	0	1	1
1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1
1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1

Die Formel $(F \to G)$ ist also gültig.

Nicht verwechseln!

Analog zum Unterschied zwischen den Symbolen „$\leftrightarrow$“, „$\equiv$“ und „$\Longleftrightarrow$“ (s. Folie 386), unterscheiden sich „$\rightarrow$“, „$\models$“ und „$\Longrightarrow$“ darin, dass „$\rightarrow$“ ein logischer Junktor, „$\models$“ eine homogene Relation über aussagenlogische Formeln und „$\Longrightarrow$“ eine Abkürzung auf der logischen Metaebene für „dann gilt“ ist.

Als Tabelle:

Logische Ebene	Äquivalenz	Implikation
Abkürzungen in der Metaebene	$\Longleftrightarrow$	$\Longrightarrow$
Relationen über Formeln	$\equiv$	$\models$
Junktoren in der Aussagenlogik	$\leftrightarrow$	$\rightarrow$

Quizfrage

Welche Eigenschaften besitzt die homogene Relation $\models$ über aussagenlogische Formeln?

Antwort

$\models$ ist nur reflexiv und transitiv.

Ein Kalkül für Inferenzen

Im Kalkül des natürlichen Schließens benutzen wir Inferenzregeln, um Aussagen der Form

$$A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \vdash F$$

zu beweisen. Die Formeln $A_1, \ldots, A_n$ werden Annahmen genannt.

$A_1, \ldots, A_n \models F$ bedeutet:

„Wenn $A_1, \ldots, A_n$ alle wahr sind, dann auch F“.

$A_1, \ldots, A_n \vdash F$ bedeutet dagegen:

„Aus den Annahmen $A_1, \ldots, A_n$ lässt sich F mit den Inferenzregeln ableiten“.

Es wird gelten:

$$A_1, \ldots, A_n \models F \iff A_1, \ldots, A_n \vdash F$$

Infos

- $\vdash$ ist, wie $\models$ und $\equiv$, nichts anderes als eine Relation über aussagenlogische Formeln. Sie heißt Ableitungsrelation.
- Auch hier ist es üblich, dass man $A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \vdash F$ zu

$$A_1, \ldots, A_n \vdash F \quad \text{oder} \quad \{A_1, \ldots, A_n\} \vdash F$$

umschreibt.

Graphische Darstellung der Inferenzregeln

Die Inferenzregeln haben die Form:

$$\frac{\ldots \vdash \ldots \qquad \ldots \vdash \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \vdash \ldots}{\ldots \vdash \ldots}$$

Dabei stehen die Prämissen oberhalb des Folgerungsstrichs und die Folgerung unterhalb. Intuitiv heißt das:

> *„Um die Aussage unter dem Strich zu zeigen, reicht es alle Aussagen über dem Strich (getrennt voneinander) zu zeigen."*

Wichtig!

Die Regeln sind syntaktische Regeln! Man darf hier keine Äquivalenzumformungen machen. Siehe hierzu die „Achtung!"-Blöcke bei den nächsten Beispielen.

Erstes Beispiel (Konjunktionseinführung)

Für beliebige Formeln $A_1, \ldots, A_n$, F und G gilt die Regel:

$$\frac{A_1, \ldots, A_n \vdash F \qquad A_1, \ldots, A_n \vdash G}{A_1, \ldots, A_n \vdash (F \wedge G)}$$

Intuitiv heißt das:

> *„Um zu zeigen, dass sich aus den Annahmen $A_1, \ldots, A_n$ die Formel $F \wedge G$ ableiten lässt, zeige dass sich aus denselben Annahmen $A_1, \ldots, A_n$ die Formeln F und G getrennt voneinander ableiten lassen.“*

Achtung!

Wenn die untere Formel keine Konjunktion ist (also kein „$\wedge$“ dazwischen hat), dann ist diese Regel nicht anwendbar!

Zweites Beispiel (Implikationsbeseitigung)

Für beliebige Formeln $A_1, \ldots, A_n, F, G$ gilt die Regel:

$$\frac{A_1, \ldots, A_n \vdash F \to G \qquad A_1, \ldots, A_n \vdash F}{A_1, \ldots, A_n \vdash G}$$

Intuitiv heißt das:

> *„Um zu zeigen, dass sich aus den Annahmen $A_1, \ldots, A_n$ eine Formel G ableiten lässt, zeige dass sich aus denselben Annahmen $A_1, \ldots, A_n$ sowohl die Implikation $F \to G$ als auch die Formel F ableiten lässt.“*

Infos

- Hier darf G beliebig sein! Diese Regel ist also immer anwendbar! :-)
- Der lateinische Name der Implikationsbeseitigung ist *Modus Ponens*.

Drittes Beispiel (Negationseinführung)

Für beliebige Formeln $A_1, \ldots, A_n, F$ gilt die Regel:

$$\frac{A_1, \ldots, A_n, F \vdash \text{false}}{A_1, \ldots, A_n \vdash \neg F}$$

Intuitiv heißt das:

> *„Um zu zeigen, dass sich aus den Annahmen $A_1, \ldots, A_n$ die Negation $\neg F$ ableiten lässt, zeige dass sich aus den neuen Annahmen $A_1, \ldots, A_n, F$ ein Widerspruch (*false*) ableiten lässt.“*

Achtung!

Wenn die untere Formel keine Negation ist (also kein „$\neg$“ davor hat), dann ist diese Regel nicht anwendbar!

Viertes Beispiel (Annahmeregeln)

Für beliebige Formeln $A_1, \ldots, A_n$ gelten die Regeln:

$$\frac{}{A_1, \ldots, A_n \vdash A_1} \quad , \quad \frac{}{A_1, \ldots, A_n \vdash A_2} \quad , \quad \cdots \quad , \quad \frac{}{A_1, \ldots, A_n \vdash A_n}$$

Intuitiv heißt das:

> *„Um zu zeigen, dass sich aus den Annahmen $A_1, \ldots, A_n$ eine beliebige Annahme ableiten lässt, muss nichts gezeigt werden.“*

Achtung!

Die Annahme auf der rechten Seite von „$\vdash$“ muss syntaktisch gleich auf der linken Seite vorkommen. Semantisch äquivalent reicht nicht!

Fünftes Beispiel (Regel für false)

Für beliebige Formeln $A_1, \ldots, A_n$ und F gilt die Regel:

$$\frac{A_1, \ldots, A_n \vdash F \qquad A_1, \ldots, A_n \vdash \neg F}{A_1, \ldots, A_n \vdash \text{false}}$$

Intuitiv heißt das:

> *„Um zu zeigen, dass sich aus den Annahmen $A_1, \ldots, A_n$ ein Widerspruch* false *ableiten lässt, zeige dass sich aus denselben Annahmen $A_1, \ldots, A_n$ sowohl eine Formel F als auch ihre Negation $\neg F$ ableiten lässt.“*

Achtung!

Wenn die untere Formel nicht genau „false“ ist, sondern z.B. $F \wedge \neg F$, dann ist diese Regel nicht anwendbar!

Überblick Inferenzregeln

Für beliebige Formeln $A_1, \ldots, A_n$, F, G und H gelten folgende Regeln.

1. Annahmeregeln („AR“):

$$\frac{}{A_1, \ldots, A_n \vdash A_i} \qquad \text{für alle } i = 1, \ldots, n$$

2. Ausgeschlossener Dritte („AD“):

$$\frac{}{A_1, \ldots, A_n \vdash (F \vee \neg F)}$$

3. Regel für true („true“):

$$\frac{}{A_1, \ldots, A_n \vdash \text{true}}$$

4. Regel für false („false“):

$$\frac{A_1, \ldots, A_n \vdash F \qquad A_1, \ldots, A_n \vdash \neg F}{A_1, \ldots, A_n \vdash \text{false}}$$

5. Konjunktionseinführung („+∧“):

$$\frac{A_1, \ldots, A_n \vdash F \qquad A_1, \ldots, A_n \vdash G}{A_1, \ldots, A_n \vdash (F \wedge G)}$$

6. Konjunktionsbeseitigung („−∧“):

$$\frac{A_1, \ldots, A_n \vdash (F \wedge G)}{A_1, \ldots, A_n \vdash F} \quad \text{und} \quad \frac{A_1, \ldots, A_n \vdash (F \wedge G)}{A_1, \ldots, A_n \vdash G}$$

7. Disjunktionseinführung („+∨“):

$$\frac{A_1, \ldots, A_n \vdash F}{A_1, \ldots, A_n \vdash (F \vee G)} \quad \text{und} \quad \frac{A_1, \ldots, A_n \vdash F}{A_1, \ldots, A_n \vdash (G \vee F)}$$

8. Disjunktionsbeseitigung („−∨“):

$$\frac{A_1, \ldots, A_n \vdash (F \vee G) \qquad A_1, \ldots, A_n, F \vdash H \qquad A_1, \ldots, A_n, G \vdash H}{A_1, \ldots, A_n \vdash H}$$

9. Negationseinführung („$+\neg$“):

$$\frac{A_1, \ldots, A_n, F \vdash \text{false}}{A_1, \ldots, A_n \vdash \neg F}$$

10. Negationsbeseitigung („$-\neg$“):

$$\frac{A_1, \ldots, A_n, \neg F \vdash \text{false}}{A_1, \ldots, A_n \vdash F}$$

11. Implikationseinführung („$+ \rightarrow$“):

$$\frac{A_1, \ldots, A_n, F \vdash G}{A_1, \ldots, A_n \vdash (F \rightarrow G)}$$

12. Implikationsbeseitigung („$- \rightarrow$“) bzw. Modus Ponens („MP“):

$$\frac{A_1, \ldots, A_n \vdash (F \rightarrow G) \qquad A_1, \ldots, A_n \vdash F}{A_1, \ldots, A_n \vdash G}$$

Beispiel

Beweis, dass die Formel $(p \wedge q) \rightarrow (p \vee q)$ gültig ist:

1.	$p \wedge q$	$\vdash$	$p \wedge q$	(AR)
2.	$p \wedge q$	$\vdash$	p	$(- \wedge$ auf 1.)
3.	$p \wedge q$	$\vdash$	$p \vee q$	$(+ \vee$ auf 2.)
4.		$\vdash$	$(p \wedge q) \rightarrow (p \vee q)$	$(+ \rightarrow$ auf 3.)

Info

Man kann solche Beweise als Liste oder als Baum darstellen. Wenn man sie als Liste darstellt muss man explizit angeben auf welche Formel man die Regeln anwendet.

Quizfrage

Wie kann man mit dem Kalkül des natürlichen Schließens beweisen, dass die Formel

$$p \to (q \to p)$$

gültig ist?

Antwort

Beweis:

1.	p, q	$\vdash$	p	(AR)
2.	p	$\vdash$	$q \to p$	$(+\to$ auf 1.)
3.		$\vdash$	$p \to (q \to p)$	$(+\to$ auf 2.)

Quizfrage

Gegeben sei folgender Beweis, dass $((p \to q) \land p) \to q$ gültig ist:

1.	$(p \to q) \land p$	$\vdash$	$(p \to q) \land p$
2.	$(p \to q) \land p$	$\vdash$	$p \to q$
3.	$(p \to q) \land p$	$\vdash$	p
4.	$(p \to q) \land p$	$\vdash$	q
5.		$\vdash$	$((p \to q) \land p) \to q$

Welche Regel wurde bei jedem Schritt benutzt?

Schreibe zu jedem Schritt dazu auf welche vorangegangenen Formeln die angewandte Regel sich bezieht.

Antwort

1.	$(p \to q) \wedge p$	$\vdash$	$(p \to q) \wedge p$	(AR)
2.	$(p \to q) \wedge p$	$\vdash$	$p \to q$	$(- \wedge$ auf 1.)
3.	$(p \to q) \wedge p$	$\vdash$	p	$(- \wedge$ auf 1.)
4.	$(p \to q) \wedge p$	$\vdash$	q	$(- \to$ auf 2. und 3.)
5.		$\vdash$	$((p \to q) \wedge p) \to q$	$(+ \to$ auf 4.)

Quizfrage

Gegeben sei folgender Beweis, dass $(p \to (q \to r)) \to (p \to q) \to (p \to r)$ gültig ist:

1.	$p \to (q \to r), p \to q, p$	$\vdash$	p
2.	$p \to (q \to r), p \to q, p$	$\vdash$	$p \to (q \to r)$
3.	$p \to (q \to r), p \to q, p$	$\vdash$	$p \to q$
4.	$p \to (q \to r), p \to q, p$	$\vdash$	q
5.	$p \to (q \to r), p \to q, p$	$\vdash$	$q \to r$
6.	$p \to (q \to r), p \to q, p$	$\vdash$	r
7.	$p \to (q \to r), p \to q$	$\vdash$	$p \to r$
8.	$p \to (q \to r)$	$\vdash$	$(p \to q) \to (p \to r)$
9.		$\vdash$	$(p \to (q \to r)) \to (p \to q) \to (p \to r)$

Welche Regel wurde bei jedem Schritt benutzt?

Schreibe zu jedem Schritt dazu auf welche vorangegangenen Formeln die angewandte Regel sich bezieht.

Antwort

1.	$p \to (q \to r), p \to q, p$	$\vdash$	p	(AR)
2.	$p \to (q \to r), p \to q, p$	$\vdash$	$p \to (q \to r)$	(AR)
3.	$p \to (q \to r), p \to q, p$	$\vdash$	$p \to q$	(AR)
4.	$p \to (q \to r), p \to q, p$	$\vdash$	q	$(- \to$ auf 1. und 3.)
5.	$p \to (q \to r), p \to q, p$	$\vdash$	$q \to r$	$(- \to$ auf 1. und 2.)
6.	$p \to (q \to r), p \to q, p$	$\vdash$	r	$(- \to$ auf 4. 5.)
7.	$p \to (q \to r), p \to q$	$\vdash$	$p \to r$	$(+ \to$ auf 6.)
8.	$p \to (q \to r)$	$\vdash$	$(p \to q) \to (p \to r)$	$(+ \to$ auf 7.)
9.		$\vdash$	$(p \to (q \to r)) \to (p \to q) \to (p \to r)$	$(+ \to$ auf 8.)

Infos

- Ein Kalkül heißt korrekt, falls gilt:

$$A_1, \ldots, A_n \vdash F \quad \Longrightarrow \quad A_1, \ldots, A_n \models F.$$

- Ein Kalkül heißt vollständig, falls gilt:

$$A_1, \ldots, A_n \models F \quad \Longrightarrow \quad A_1, \ldots, A_n \vdash F.$$

- Der Kalkül des natürlichen Schließens ist in der Aussagenlogik sowohl korrekt als auch vollständig. Es gilt:

$$F \vdash G \quad \Longleftrightarrow \quad F \models G \quad \Longleftrightarrow \quad (F \to G) \text{ ist gültig.}$$

- Wenn die Gefahr besteht, dass man den Kalkül des natürlichen Schließens mit einem anderen verwechselt, benutzt man z.B. auch „$\vdash_{\mathsf{Nat}}$“, statt nur „$\vdash$“.
- Auf Folie 485 sind wichtige Aussagen zu $\models$ und $\vdash$ aufgelistet.

Frege-Lukasiewicz-Kalkül

Im Frege-Lukasiewicz-Kalkül (kurz FL-Kalkül) sind nur die logischen Junktoren $\to$ und $\neg$ erlaubt. Für beliebige Formeln $A_1, \ldots, A_n$, F, G und H gelten folgende fünf Inferenzregeln.

1. Annahmeregeln („AR“):

$$\frac{}{A_1, \ldots, A_n \vdash_{\mathsf{FL}} A_i} \qquad \text{für alle } i = 1, \ldots, n$$

2. Axiom 1 („Ax1“):

$$\frac{}{A_1, \ldots, A_n \vdash_{\mathsf{FL}} (F \to (G \to F))}$$

3. Axiom 2 („Ax2“):

$$\frac{}{A_1, \ldots, A_n \vdash_{\mathsf{FL}} ((F \to (G \to H)) \to ((F \to G) \to (F \to H)))}$$

4. Axiom 3 („Ax3“):

$$\frac{}{A_1, \ldots, A_n \vdash_{\mathsf{FL}} ((\neg F \to \neg G) \to (G \to F))}$$

5. Implikationsbeseitigung („$- \to$“) bzw. Modus Ponens („MP“):

$$\frac{A_1, \ldots, A_n \vdash_{\mathsf{FL}} F \to G \qquad A_1, \ldots, A_n \vdash_{\mathsf{FL}} F}{A_1, \ldots, A_n \vdash_{\mathsf{FL}} G}$$

Wichtig!

Der FL-Kalkül gehört nicht zum normalen DS-Stoff. Er ist auf diesen Folien, weil er im Wintersemester 13/14 in einer Aufgabe vorkam. Falls es dieses Semester nicht der Fall ist, kann er ignoriert werden :-)

Themenübersicht

Themenübersicht

Syntax prädikatenlogischer Formeln

1. Jede Variable und jede Konstante ist ein Term.
2. Sind $t_1, \ldots, t_n$ Terme und f ein n-äres Funktionensymbol, dann ist $f(t_1, \ldots, t_n)$ ebenfalls ein Term.
3. Sind $t_1, \ldots, t_n$ Terme und P ein n-äres Prädikatensymbol, dann ist $P(t_1, \ldots, t_n)$ eine Formel.
4. Sind t und u Terme, dann ist $t = u$ eine Formel.
5. Ist F eine Formel, dann ist auch $\neg F$ eine Formel.
6. Sind F und G Formeln, dann sind auch $(F \wedge G)$, $(F \vee G)$, $(F \rightarrow G)$, $(F \leftrightarrow G)$, $(F \otimes G)$, $(F \barwedge G)$ und $(F \barvee G)$ Formeln
7. Ist x eine Variable und F eine Formel, dann sind $\forall x F$ und $\exists x F$ ebenfalls Formeln.

Infos

- Wir gehen davon aus, dass jedes Symbol entweder als Variable, Konstante, Funktionen- oder Prädikatensymbol benutzt wird und niemals als zwei Sachen gleichzeitig.
- Für Variablen benutzen wir meistens x, y, z, für Konstanten a, b, c, als Funktionensymbole f, g, h und als Prädikatensymbole P, Q, R.
- Der Gültigkeitsbereich eines Vorkommens einer Variablen x in einer Formel F ist die kleinste Unterformel von F der Gestalt $\forall xG$ oder $\exists xG$, welche das Vorkommen enthält. In diesem Fall nennt man x gebunden.
- Wenn es diese Unterformel nicht gibt, dann ist der Gültigkeitsbereich die Formel F selbst und wir nennen x frei.
- Eine Formel ohne freie Variablen heißt geschlossen.
- Eine Formel, in der keine Variable sowohl gebunden als auch frei vorkommt, und hinter allen vorkommenden Quantoren verschiedene Variablen stehen, heißt bereinigt.
- Durch Umbenennung der Variablen kann man jede Formel bereinigen :-)

Strukturen

Eine Struktur $S = (U, I)$ besteht aus einer Menge U (das Universum) und einer partiellen Funktion I (die Interpretation), die:

- einer Variablen x ein Element aus U,
- einer Konstanten a ein Element U,
- einem k-stelligen Prädikatensymbol P eine Menge aus U^k und
- einem k-stelligen Funktionensymbol f eine Funktion $U^k \to U$

zuordnet. Wir sagen, dass $I(x)$, $I(a)$, $I(P)$ und $I(f)$ die Interpretationen von x, a, P und f unter S sind.

Eine Struktur $S = (U, I)$ passt zu einer Formel F, falls die Interpretation I für alle in F vorkommenden freien Variablen, Konstanten, Funktionen- und Prädikatensymbole definiert ist.

Infos

- Das Universum U einer Struktur S kann endlich oder unendlich sein, aber nicht leer!
- Unäre und binäre Prädikatensymbole lassen sich sehr schön modellieren:

Arität des Prädikatensymbols	graphische Darstellung	Intuition
unär (z.B. $P(x)$)	als Venn-Diagramm	„x hat die Eigenschaft“ „x ist in der Menge enthalten“
binär (z.B. $P(x, y)$)	als Graph einer Relation	„x zeigt auf y“ „x steht mit y in Relation“

- Die Interpretation von Funktionen- und Prädikatensymbolen kann man sowohl intensional als auch extensional angeben.

Semantik prädikatenlogischer Formeln

Die Semantik einer Formel F ist eine Funktion $[F]$, die jeder Struktur S, die zu F passt, einen Wert $[F](S)$ aus $\mathbb{B} = \{0, 1\}$ zuordnet.

Für alle Strukturen $S = (U, I)$ gilt folgende induktive Definition:

1. Sind $t_1, \ldots, t_n$ Terme und P ein Prädikatensymbol, dann gilt:

$$[P(t_1, \ldots, t_n)](S) \quad = \quad \begin{cases} 1, & \text{falls } (I(t_1), \ldots, I(t_n)) \in I(P) \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

2. Sind t und u Terme, dann gilt:

$$[t = u](S) \quad = \quad \begin{cases} 1, & \text{falls } I(t) = I(u) \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

3. Sind $[F]$ und $[G]$ die Semantiken zweier Formeln F und G, dann sind die Semantiken von $(F \wedge G)$, $(F \vee G)$, $(F \rightarrow G)$, $(F \leftrightarrow G)$, $(F \otimes G)$, $(F \barwedge G)$ und $(F \barvee G)$ analog zur Aussagenlogik definiert, z.B.:

$$[F \wedge G](S) \quad = \quad \begin{cases} 1, & \text{falls } [F](S) = 1 \text{ und } [G](S) = 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

4. Ist x eine Variable, G eine Formel und $S_{x:=d}$ die Struktur S mit dem einzigen Unterschied $x_{S_{x:=d}} = d$, dann gilt:

$$[\exists x G](S) \quad = \quad \begin{cases} 1, & \text{falls es ein } d \in U \text{ gibt mit: } [G](S_{x:=d}) = 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$[\forall x G](S) \quad = \quad \begin{cases} 1, & \text{falls für jedes } d \in U \text{ gilt: } [G](S_{x:=d}) = 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Eigenschaften prädikatenlogischer Formeln

Die Begriffe erfüllbar, gültig, unerfüllbar, falsifizierbar, Tautologie und Widerspruch werden für prädikatenlogische Formeln analog definiert wie in der Aussagenlogik. Man muss nur auf Folie 378 das Wort „Belegung“ durch „Struktur“ ersetzen.

Infos

- Auch hier gelten die Beziehungen aus Folie 381.
- Eine Struktur S mit $[F](S) = 1$ wird Modell von F genannt.

Beispiel

In der Formel

$$F = \overbrace{\forall x \exists y P(x,y)}^{1.} \wedge \overbrace{\exists y \forall x \neg P(x,y)}^{2.} \wedge \overbrace{\forall x \neg P(x,x)}^{3.}$$

kann P als Relation interpretiert werden, für die folgendes gelten muss:

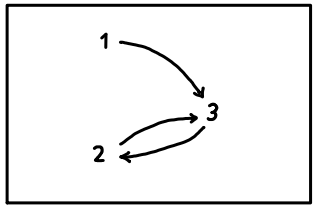
1. Für jedes Element x gibt es ein Element y, so dass x auf y zeigt.
2. Es gibt ein Element y, so dass für alle Elemente x gilt: x zeigt nicht auf y.
3. Für alle Elemente x gilt: x zeigt nicht auf sich selbst.

Kürzer:

1. Jedes Element x zeigt auf mindestens ein Element y.
2. Es gibt ein Element y, auf das kein Element x zeigt.
3. Kein Element x zeigt auf sich selbst.

Gesucht ist eine Struktur $S = (U, I)$, die F erfüllt.

Graphisch:



Formal: $U = \{1, 2, 3\}$ mit

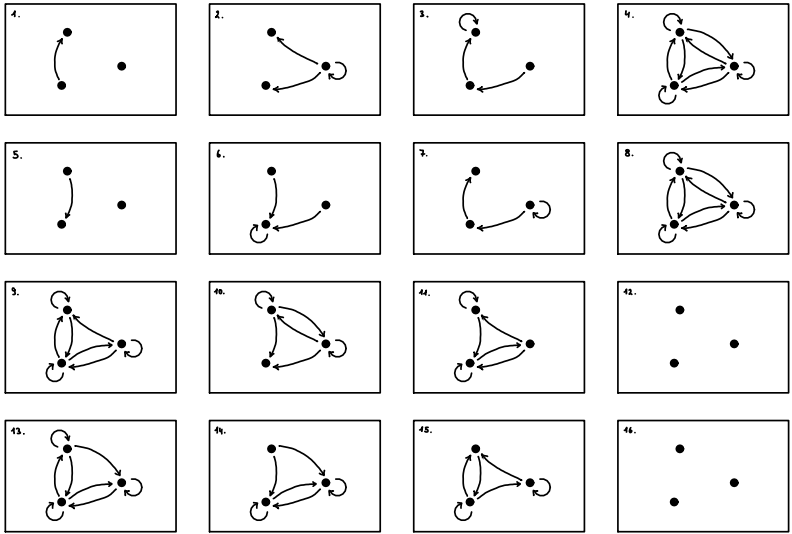
$$I(P) = \{(1, 3), (2, 3), (3, 2)\}.$$

Mehr Beispiele

Sei $S = (U, I)$ eine Struktur mit U der Menge aller Gäste in einer Assi-Bar in der $P(x, y)$ als „x schlägt y“ interpretiert wird. Dann erhalten wir folgende Interpretationen:

1. $\exists x \exists y \quad P(x, y)$ „Jemand schlägt jemanden.“
2. $\exists x \forall y \quad P(x, y)$ „Jemand schlägt jeden.“
3. $\forall x \exists y \quad P(x, y)$ „Jeder schlägt jemanden.“
4. $\forall x \forall y \quad P(x, y)$ „Jeder schlägt jeden.“ (Pogo!)
5. $\exists y \exists x \quad P(x, y)$ „Jemand wird von jemandem geschlagen.“
6. $\exists y \forall x \quad P(x, y)$ „Jemand wird von jedem geschlagen.“
7. $\forall y \exists x \quad P(x, y)$ „Jeder wird von jemandem geschlagen.“
8. $\forall y \forall x \quad P(x, y)$ „Jeder wird von jedem geschlagen.“
9. $\exists x \exists y \neg P(x, y)$ „Jemand schlägt jemanden nicht.“
10. $\exists x \forall y \neg P(x, y)$ „Jemand schlägt niemanden.“
11. $\forall x \exists y \neg P(x, y)$ „Jeder schlägt jemanden nicht.“
12. $\forall x \forall y \neg P(x, y)$ „Jeder schlägt niemanden.“
13. $\exists y \exists x \neg P(x, y)$ „Jemand wird von jemandem nicht geschlagen.“
14. $\exists y \forall x \neg P(x, y)$ „Jemand wird von niemandem geschlagen.“
15. $\forall y \exists x \neg P(x, y)$ „Jeder wird von jemandem nicht geschlagen.“
16. $\forall y \forall x \neg P(x, y)$ „Jeder wird von niemandem geschlagen.“

Mögliche Modelle für die einzelnen Formeln sind:



Infos

- Dass x und y unterschiedliche Variablennamen haben heißt nicht, dass sie immer auf unterschiedliche Elemente zeigen. Wenn im Beispiel jeder jeden schlägt, dann muss sich auch jeder selber schlagen.
- Die Übersetzung von Prädikatenlogik ins Deutsche ist sehr schwierig! Bestimmt habe ich im Beispiel einiges falsch formuliert.
- Unter

  `http://de.wikipedia.org/wiki/Quantor`

  findet ihr viele hilfreiche Beispiele, um Quantoren besser zu verstehen.

Quizfrage

Wir betrachten die Formel

$$F = \forall x \exists y \neg P(x, y) \wedge \forall y \exists x P(x, y).$$

Welche der folgenden Interpretationen I für das binäre Prädikat P bilden zusammen mit $U = \{1, 2\}$ ein Modell $S = (U, I)$ für F?

Antwort

Intuitiv besagt $\forall x \exists y \neg P(x, y)$, dass jedes Element auf mindestens ein Element nicht zeigt und $\forall y \exists x P(x, y)$, dass jedes Element von mindestens einem Element „gezeigt wird“.

Die einzigen Interpretationen $I(P)$ für P über $U = \{1, 2\}$, die F erfüllen sind:

$\{(1,1),(2,2)\}$ und $\{(1,2),(2,1)\}$

Themenübersicht

Logische Äquivalenz und Inferenz

Für beliebige Formeln F und G gilt:

$$F \equiv G \quad :\Longleftrightarrow \quad \text{(für alle passende Strukturen } S \text{ gilt: } [F](S) = 1 \Longleftrightarrow [G](S) = 1)$$
$$F \models G \quad :\Longleftrightarrow \quad \text{(für alle passende Strukturen } S \text{ gilt: } [F](S) = 1 \Longrightarrow [G](S) = 1)$$

Infos

- Auch hier sind $\equiv$ und $\models$ ist nichts anderes als Relationen über Formeln.
- Für $F \equiv G$ sagen wir „F und G sind äquivalent“.
- Für $F \models G$ sagen wir „G folgt aus F“.

Äquivalenz- und Folgerungsregeln für Quantoren

Seien F und G beliebige Formeln. Ein paar nützliche Äquivalenzregeln sind:

$\neg\forall x F \equiv \exists x \neg F$	$\neg\exists x F \equiv \forall x \neg F$	(De Morgan)
$\forall x \forall y F \equiv \forall y \forall x F$	$\exists x \exists y F \equiv \exists y \exists x F$	
$\exists x \forall y F \models \forall y \exists x F$		(Kommutativität)
$\forall x (F \wedge G) \equiv \forall x F \wedge \forall x G$	$\exists x (F \vee G) \equiv \exists x F \vee \exists x G$	
$\forall x F \vee \forall x G \models \forall x (F \vee G)$	$\exists x (F \wedge G) \models \exists x F \wedge \exists x G$	(Distributivität)
$\exists x (F \wedge G) \equiv \exists x F \wedge G$	$\exists x (F \vee G) \equiv \exists x F \vee G$	
$\forall x (F \wedge G) \equiv \forall x F \wedge G$	$\forall x (F \vee G) \equiv \forall x F \vee G$	(falls x in G nicht frei vorkommt)

Diese Regeln sind eine Erweiterung der Äquivalenzregeln für aussagenlogische Formeln (s. Folie 389).

Wichtige Aussagen zu Äquivalenzen

1. Für eine beliebige Formel F gilt:

$$\begin{array}{lcl} \text{die Formel } F \text{ ist gültig} & \iff & F \equiv \text{true} \\ \text{die Formel } F \text{ ist unerfüllbar} & \iff & F \equiv \text{false} \end{array}$$

2. Für zwei beliebige Formeln F und G gilt:

$$F \equiv G \iff \text{die Formel } (F \leftrightarrow G) \text{ ist gültig}$$

Inferenzregeln für Quantoren

Für beliebige Formeln $A_1, \ldots, A_n$, F, G und jede Konstante a gelten folgende Regeln:

13. Allquantoreinführung („$+\forall$“): Falls a nicht in $A_1, \ldots, A_n$ oder F vorkommt:

$$\frac{A_1, \ldots, A_n \vdash F[x \backslash a]}{A_1, \ldots, A_n \vdash \forall x F}$$

14. Allquantorbeseitigung („$-\forall$“):

$$\frac{A_1, \ldots, A_n \vdash \forall x F}{A_1, \ldots, A_n \vdash F[x \backslash a]}$$

15. Existenzquantoreinführung („$+\exists$“):

$$\frac{A_1, \ldots, A_n \vdash F[x \backslash a]}{A_1, \ldots, A_n \vdash \exists x F}$$

16. Existenzquantorbeseitigung („$-\exists$“): Falls a nicht in $A_1, \ldots, A_n$, F oder G vorkommt:

$$\frac{A_1, \ldots, A_n \vdash \exists x F \qquad A_1, \ldots, A_n, F[x \backslash a] \vdash G}{A_1, \ldots, A_n \vdash G}$$

Infos

- Die Inferenzregeln für Quantoren sind eine Erweiterung der Inferenzregeln von dem Kalkül des natürlichen Schließens aus Folie 449.
- Mit $F[x \backslash a]$ wird die Formel bezeichnet, die man erhält, wenn man in F alle freien Vorkommnisse von x durch a ersetzt.

Wichtige Aussagen zu Inferenzen

1. Für eine beliebige Formel F gilt:

$$\begin{array}{lcll} \text{die Formel } F \text{ ist gültig} & \iff & \text{true} \models F & \iff: \models F \\ \text{die Formel } F \text{ ist unerfüllbar} & \iff & F \models \text{false} & \end{array}$$

2. Für zwei beliebige Formeln F und G gilt:

$$\begin{array}{lcl} F \models G & \iff & \text{die Formel } (F \to G) \text{ ist gültig} \\ F \equiv G & \iff & F \models G \text{ und } G \models F \end{array}$$

3. Für zwei aussagenlogische Formeln F und G gilt:

$$F \vdash G \iff F \models G$$

4. Für zwei prädikatenlogische Formeln F und G gilt:

$$F \vdash G \implies F \models G$$

Themenübersicht

Themenübersicht

Wichtige Terminologie aus der Mathematik

- Eine Annahme ist eine Aussage, bei der man davon ausgeht, dass sie wahr ist. Annahmen werde auch Postulate, Hypothesen, Prämissen oder Axiome genannt.
- Ein Satz ist eine Aussage, die aus den Annahmen folgt. Sätze werden auch Theoreme genannt.
- Ein Beweis ist die korrekte und vollständige (lückenlose) Argumentation dafür, dass ein Satz tatsächlich aus den Annahmen folgt.
- Ein Lemma ist ein Hilfssatz, der im Beweis eines anderen (wichtigeren) Satzes benutzt wird.
- Ein Korollar ist ein Theorem, das leicht als Folgerung eines wichtigen Theorems bewiesen werden kann.

Struktur mathematischer Aussagen

Mathematische Aussagen können als prädikatenlogische Formeln über einer geeigneten Basisstruktur S formuliert werden. Dabei werden einzelne Teilaussagen wie folgt übersetzt:

Aussage	Kompaktschreibweise	Prädikatenlogik
nicht F		$\neg F$
F und G		$F \wedge G$
F oder G		$F \vee G$
Wenn F, dann G	$F \Longrightarrow G$	$F \rightarrow G$
F genau dann, wenn G	$F \Longleftrightarrow G$	$F \leftrightarrow G$
Für alle $x \in A$ gilt F	$\forall x \in A : F$	$\forall x(A(x) \rightarrow F)$
Es gibt ein $x \in A$ für das F gilt	$\exists x \in A : F$	$\exists x(A(x) \wedge F)$

Hierbei entspricht die Menge A genau der Interpretation des Prädikats A unter S, d.h. $A_S = A$.

Formale Beweise

Die zu beweisende Aussage F und die Annahmen $A_1, \ldots, A_n$ werden als prädikatenlogische Formeln formalisiert. Dann wird, mithilfe einer festgelegten Menge von gültigen Inferenzregeln, eine Herleitung für

$$A_1, \ldots, A_n \vdash F$$

gesucht. Hier wird F Folgerung oder auch Conclusio genannt.

Leider sind formale Beweise viel zu kompliziert und aufwendig. Deswegen werden sie in einer Mischung aus natürlicher Sprache und Prädikatenlogik bewiesen. Ein informeller Beweis wird dann akzeptiert, wenn man der Meinung ist, dass er sich formalisieren ließe.

Grobe Vorgehensweise

Die Gestalt einer Aussage suggeriert, wie man vorgehen könnte. Die wichtigsten sind auf folgender Tabelle aufgelistet:

Gestalt	Vorgehensweise
nicht F	Zeige, dass F nicht gilt.
F und G	Zeige F und G in zwei getrennten Beweisen.
$F \Longrightarrow G$	Füge F in die Menge der Annahmen hinzu und zeige G.
F oder G	Zeige: *nicht* $F \Longrightarrow G$. (Alternativ zeige: *nicht* $G \Longrightarrow F$.)
$F \Longleftrightarrow G$	Zeige: $F \Longrightarrow G$ *und* $G \Longrightarrow F$.
$\forall x \in A : F$	Sei x ein beliebiges Element aus A. Zeige dann F.
$\exists x \in A : F$	Sei x ein konkretes Element aus A. Zeige dann F.

Auf diese Weise wächst im Laufe des Beweises die Menge der Annahmen.

Schreibweisen für Beweise

Beweise werden oft als Fließtext geschrieben. Ich persönlich bevorzuge es, Beweise wie folgt zu strukturieren:

Annahmen: $A_1, A_2, \ldots, A_n$.
Zu zeigen: Aussage F
Beweis: Es gelten $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

$$
\begin{aligned}
&\Longrightarrow \quad \text{Es folgt } F_1. \quad (\text{Begründung für } F_1)\\
&\Longrightarrow \quad \text{Es folgt } F_2. \quad (\text{Begründung für } F_2)\\
&\Longrightarrow \quad \text{Es folgt } F_3. \quad (\text{Begründung für } F_3)\\
&\qquad \vdots
\end{aligned}
$$

□

Zum Zeitpunkt, an dem die Folgerung F_i begründet werden muss, wurden alle Folgerungen $F_1, \ldots, F_{i-1}$ in die Menge der Annahmen hinzugefügt. D.h. man kann, um F_i zu begründen, alle Annahmen $A_1, \ldots, A_n$ und Folgerungen $F_1, \ldots, F_{i-1}$ benutzen.

Infos

- Man kann eine Folgerung kommentieren oder nicht (je nachdem wie trivial sie ist!)
- Man kann die benutzten Annahmen bzw. Aussagen über dem entsprechenden Implikationspfeil schreiben, z.B.:

$$\begin{aligned} &\xRightarrow{\text{Annahme 2}} && \dots \\ &\xRightarrow{\text{Lemma 25}} && \dots \\ &\xRightarrow{\text{Satz von Euler}} && \dots \end{aligned}$$

- Diese strukturierte Schreibweise wurde in Folien 148 - 205 oft benutzt. In den nächsten Beispielen wird sie für andere Beweise benutzt.

Erstes Beispiel

Satz:

> *Seien A und B endliche Mengen und $f : A \to B$ eine Funktion. Wenn f injektiv und nicht surjektiv ist, dann ist die Kardinalität von A kleiner als die von B.*

Annahmen:

- $|A|, |B| < \infty$,
- $f : A \to B$,
- f injektiv,
- f nicht surjektiv.

Zu zeigen: $|A| < |B|$.

Beweis: Aus den Annahmen folgt:

$$
\begin{array}{lll}
\Longrightarrow & \text{Für alle } b \in B \text{ gilt } |f^{-1}(b)| \leq 1. & (\text{da } f \text{ injektiv}) \\
\Longrightarrow & \text{Es gibt ein } b \in B \text{ mit } |f^{-1}(b)| = 0. & (\text{da } f \text{ nicht surjektiv}) \\
\Longrightarrow & |A| = \sum_{b \in B} |f^{-1}(b)| & (\text{s. Folie 329}) \\
& \quad = \sum_{b \in B \setminus \{b'\}} |f^{-1}(b)| & (\text{sei } b' \in B \text{ mit } |f^{-1}(b')| = 0) \\
& \quad \leq \sum_{b \in B \setminus \{b'\}} 1 & (\text{da } |f^{-1}(b)| \leq 1 \text{ für alle } b \in B) \\
& \quad = |B| - 1 & (|B| - 1 \text{ Summanden in der Summe}) \\
& \quad < |B|. & (\text{da } |A|, |B| < \infty)
\end{array}
$$

□

Zweites Beispiel

Satz:

Sei $n \in \mathbb{Z}$ ungerade. Dann ist auch n^2 ungerade.

Annahme: $n \in \mathbb{Z}$ ungerade.
Zu zeigen: $\exists k \in \mathbb{Z} : n^2 = 2k + 1$.
Beweis: Aus den Annahmen folgt:

$$
\begin{aligned}
&\Longrightarrow \quad \text{Es gibt ein } l \in \mathbb{Z} \text{ mit } n = 2l + 1. && \text{(da } n \text{ ungerade)} \\
&\Longrightarrow \quad n^2 = (2l + 1)^2 \\
&\qquad\qquad = 4l^2 + 4l + 1 \\
&\qquad\qquad = 2(2l^2 + 2l) + 1. \\
&\Longrightarrow \quad \text{Es gibt ein } k \in \mathbb{Z} \text{ mit } n^2 = 2k + 1. && \text{(nämlich } k = (2l^2 + 2l).)
\end{aligned}
$$

□

Drittes Beispiel

Satz:

Sei $f : X \to Y$ eine Funktion und $M, N \subseteq Y$ beliebige Mengen. Dann gilt:

$$f^{-1}(M \cup N) \subseteq f^{-1}(M) \cup f^{-1}(N).$$

Annahmen:

- $f : X \to Y$,
- $M, N \subseteq Y$,
- $x \in f^{-1}(M \cup N)$ beliebig.

Zu zeigen: $f^{-1}(M \cup N) \subseteq f^{-1}(M) \cup f^{-1}(N)$.

Beweis: Sei $x \in f^{-1}(M \cup N)$ beliebig.

$$
\begin{array}{lll}
\Longrightarrow & x \in f^{-1}(M \cup N) & \text{(s. Folie 304)} \\
\Longrightarrow & f(x) \in M \cup N & \\
\Longrightarrow & f(x) \in M \text{ oder } f(x) \in N & \\
\Longrightarrow & x \in f^{-1}(M) \text{ oder } x \in f^{-1}(N) & \text{(s. Folie 304)} \\
\Longrightarrow & x \in f^{-1}(M) \cup f^{-1}(N) &
\end{array}
$$

□

Erinnerung: $A \subseteq B$ heißt nichts anderes als $\forall x \in A : x \in B$.

Viertes Beispiel

Satz:

Sei $f : X \to Y$ eine Funktion und $M, N \subseteq Y$ beliebige Mengen. Dann gilt:

$$M \subseteq N \implies f^{-1}(M) \subseteq f^{-1}(N).$$

Annahmen:

- $f : X \to Y$,
- $M, N \subseteq Y$,
- $M \subseteq N$,

Zu zeigen: $M \subseteq N \implies f^{-1}(M) \subseteq f^{-1}(N)$.

Beweis: Sei $x \in f^{-1}(M)$ beliebig.

$$\begin{array}{lll} \Longrightarrow & f(x) \in M & \text{(s. Folie 304)} \\ \Longrightarrow & f(x) \in N & \text{(wegen } M \subseteq N\text{)} \\ \Longrightarrow & x \in f^{-1}(N) & \text{(s. Folie 304)} \end{array}$$

□

Erinnerung: $A \subseteq B$ heißt nichts anderes als $\forall x \in A : x \in B$.

Quizfrage

Wie kann man folgende Aussage beweisen?

Sei $f : X \to Y$ eine Funktion und $M \subseteq Y$ eine beliebige Menge. Dann gilt:

$$f^{-1}(\overline{M}) \subseteq \overline{f^{-1}(M)}.$$

Hinweise:

- Benutze Folie 304.
- Vergiss nicht, dass $A \subseteq B$ nichts anderes als $\forall x \in A : x \in B$ heißt.

Antwort

Annahmen: $f : X \to Y$, $M \subseteq Y$ und $x \in f^{-1}(\overline{M})$ beliebig.
Zu Zeigen: $f^{-1}(\overline{M}) \subseteq \overline{f^{-1}(M)}$.
Beweis: Sei $x \in f^{-1}(\overline{M})$ beliebig.

$$
\begin{aligned}
&\implies && f(x) \in \overline{M}. && \text{(Folie 304)} \\
&\implies && f(x) \notin M. \\
&\implies && x \notin f^{-1}(M). && \text{(Folie 304)} \\
&\implies && x \in \overline{f^{-1}(M)}.
\end{aligned}
$$

□

Quizfragen

Seien $f : A \to B$ und $g : B \to C$ beliebige Funktionen über Mengen A, B und C. Wie kann man folgende Implikationen beweisen?

1. f und g injektiv $\Longrightarrow$ $g \circ f$ injektiv,
2. f und g surjektiv $\Longrightarrow$ $g \circ f$ surjektiv,
3. $g \circ f$ injektiv $\Longrightarrow$ f injektiv,
4. $g \circ f$ surjektiv $\Longrightarrow$ g surjektiv.

Erinnerungen:

- Für ein beliebiges $x \in A$ gilt: $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.
- Es gilt:

$$\begin{array}{lcl} f \text{ injektiv} & \iff & (\forall a_1, a_2 \in A : f(a_1) = f(a_2) \Longrightarrow a_1 = a_2) \\ f \text{ surjektiv} & \iff & \forall b \in B : \exists a \in A : f(a) = b \end{array}$$

Antworten

1. Annahmen: $f : A \to B$ und $g : B \to C$ injektiv.
   Zu zeigen: $g \circ f$ injektiv, also:

$$\forall a_1, a_2 \in A : (g \circ f)(a_1) = (g \circ f)(a_2) \implies a_1 = a_2.$$

   Beweis: Seien $a_1, a_2 \in A$ beliebige Elemente mit $(g \circ f)(a_1) = (g \circ f)(a_2)$.

$$\begin{aligned} &\implies && g(f(a_1)) = g(f(a_2)). && \\ &\implies && f(a_1) = f(a_2). && \text{(da } g \text{ injektiv)} \\ &\implies && a_1 = a_2. && \text{(da } f \text{ injektiv)} \end{aligned}$$

□

2. Annahmen: $f : A \to B$ und $g : B \to C$ surjektiv.
   Zu zeigen: $g \circ f$ surjektiv, also:

$$\forall c \in C : \exists a \in A : (g \circ f)(a) = c.$$

Beweis: Sei $c \in C$ ein beliebiges Element.

$\implies$ Es gibt ein $b \in B$ mit $g(b) = c$. (da g surjektiv)
$\implies$ Es gibt ein $a \in A$ mit $f(a) = b$. (da f surjektiv)
$\implies$ $g(f(a)) = c$.
$\implies$ Es gibt also ein $a \in A$ mit $(g \circ f)(a) = g(f(a)) = c$.

□

3. Annahme: $f : A \to B$ und $g : B \to C$ mit $g \circ f$ injektiv.
   Zu zeigen: f injektiv, also:

$$\forall a_1, a_2 \in A : f(a_1) = f(a_2) \Longrightarrow a_1 = a_2.$$

Beweis: Seien $a_1, a_2 \in A$ beliebige Elemente mit $f(a_1) = f(a_2)$.

$$\begin{aligned} &\Longrightarrow \quad g(f(a_1)) = g(f(a_2)). \\ &\Longrightarrow \quad (g \circ f)(a_1) = (g \circ f)(a_2). \\ &\Longrightarrow \quad a_1 = a_2. \qquad\qquad (\text{da } g \circ f \text{ injektiv}) \end{aligned}$$

□

4. Annahme: $f : A \to B$ und $g : B \to C$ mit $g \circ f$ surjektiv.
   Zu zeigen: g surjektiv, also:

$$\forall c \in C : \exists b \in B : g(b) = c.$$

   Beweis: Sei $c \in C$ ein beliebiges Element.

$$\begin{aligned} &\implies \text{Es gibt ein } a \in A \text{ mit } (g \circ f)(a) = c. && \text{(da } g \circ f \text{ surjektiv)} \\ &\implies g(f(a)) = c. \\ &\implies \text{Es gibt also ein } b \in B \text{ mit } g(b) = c. && \text{(nämlich } b = f(a)) \end{aligned}$$

□

Beweistypen für Implikationen

Die meisten Aussagen in der Mathematik sind Implikationen, d.h. sie haben die Gestalt

$$F \Longrightarrow G.$$

Solche Aussagen kann man auf verschiedenen Weisen beweisen:

- Direkter Beweis:

  „Füge F in die Menge der Annahmen hinzu und zeige G."

- Indirekter Beweis:

  „Füge *nicht* G in die Menge der Annahmen hinzu und zeige *nicht* F."

- Beweis durch Widerspruch:

  „Füge F und *nicht* G in die Menge der Annahmen hinzu und zeige ein Widerspruch."

Info

Als logische Formeln formuliert, entspricht der direkte Beweis der Formel $F \to G$, der indirekte Beweis der Formel $\neg G \to \neg F$ und der Beweis durch Widerspruch der Formel $(F \wedge \neg G) \to \text{false}$.

Diese Beweismethoden sind korrekt, weil die drei Formeln äquivalent zueinander sind:

F	G	F	$\to$	G	$\neg G$	$\to$	$\neg F$	$(F$	$\wedge$	$\neg G)$	$\to$	false
0	0	0	1	0	1	1	1	0	0	1	1	0
0	1	0	1	1	0	1	1	0	0	0	1	0
1	0	1	0	0	1	0	0	1	1	1	0	0
1	1	1	1	1	0	1	0	1	0	0	1	0

Themenübersicht

Vollständige Induktion

Für Aussagen der Form

$$\text{„Für alle } n \in \mathbb{N}_0 \text{ mit } n \geq n_0 \text{ gilt die Aussage } A(n)\text{“}$$

reicht es, die Aussagen

$$A(n_0) \quad \text{und} \quad \forall n \geq n_0 : (A(n) \Longrightarrow A(n+1))$$

zu beweisen. $A(n_0)$ wird Induktionsanfang (I.A.) und $\forall n \geq n_0 : A(n) \Longrightarrow A(n+1)$ Induktionsschritt.

Um den Induktionsschritt zu zeigen, zeigen wir den Induktionsschluss (I.S.) $A(n+1)$, unter der Annahme, dass die Induktionsvoraussetzung (I.V.) $A(n)$ für ein beliebiges aber festes $n \geq n_0$ gilt.

Infos

- Bei Induktionsbeweisen beweisen eine Aussage $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$ nach folgendem Domino-Prinzip:

$$A(n_0) \Longrightarrow A(n_0+1) \Longrightarrow A(n_0+2) \Longrightarrow A(n_0+3) \Longrightarrow A(n_0+4) \Longrightarrow \ldots$$

- Man nennt den Induktionsanfang auch Induktionsbasis und die Induktionsvoraussetzung auch Induktionsannahme.

Beispiel

Satz:

Sei $x \in \mathbb{R}$ beliebig mit $x > -1$. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}_0$: $(1+x)^n \geq 1 + nx$.

Beweis:

I.A. Für $n = 0$: $(1+x)^0 = 1 = 1 + 0x$. ✓

I.V. Angenommen, es gilt $(1+x)^n \geq 1 + nx$ für ein beliebiges aber festes $n \in \mathbb{N}_0$.

I.S.

$$
\begin{aligned}
(1+x)^{n+1} &= (1+x) \cdot (1+x)^n \\
&\overset{\text{I.V.}}{\geq} (1+x) \cdot (1+nx) \\
&= 1 + x + nx + nx^2 \\
&\geq 1 + x + nx && (nx^2 \geq 0 \text{ da } n, x^2 \geq 0) \\
&= 1 + (n+1)x
\end{aligned}
$$

□

Noch ein Beispiel

Satz:

Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ mit $n \geq 4$ gilt: $2^n \geq n^2$.

Beweis:

I.A. Für $n = 4$: $2^4 = 16 = 4^2$. ✓

I.V. Angenommen, es gilt $2^n \geq n^2$ für ein beliebiges aber festes $n \in \mathbb{N}_0$ mit $n \geq 4$.

I.S.

$$2^{n+1} = 2 \cdot 2^n \overset{\text{I.V.}}{\geq} 2 \cdot n^2 = n^2 + n \cdot n \overset{(*)}{\geq} n^2 + 4n = n^2 + 2n + 2n$$
$$\overset{(*)}{\geq} n^2 + 2n + 2 \cdot 4 \geq n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$$

Bei $(*)$ wurde die Annahme $n \geq 4$ benutzt. □

Ein letztes Beispiel

Satz:

> *Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt: Eine Pizza lässt sich mit n geraden Schnitten in höchstens $\frac{n(n+1)}{2} + 1$ Stücken teilen.*

Beweis:

I.A. Für $n = 0$: Mit keinem Schnitt ist die Pizza noch ganz, d.h. sie besteht aus einem Stück. Tatsächlich gilt: $\frac{0(0+1)}{2} + 1 = 1$. ✓

I.V. Angenommen, für ein beliebiges, aber festes $n \in \mathbb{N}_0$ lässt sich die Pizza mit n geraden Schnitten in höchstens $\frac{n(n+1)}{2} + 1$ Stücken teilen.

I.S. Der $(n+1)$-te Schnitt schneidet jeden der ersten n Schnitte höchstens einmal. In diesem Fall würde man genau $n+1$ Stücke zweiteilen. Durch den $(n+1)$-ten Schnitt, kommen also zu den höchstens $\frac{n(n+1)}{2}+1$ Stücken höchstens $n+1$ dazu. Das ergibt:

$$\begin{aligned}\frac{n(n+1)}{2}+1+n+1 &= \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2}+1\\ &= \frac{n^2+3n+2}{2}+1\\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2}+1\end{aligned}$$

Pizzastücke.

Wieso entstehen $n+1$ neue Stücke, wenn man mit dem $(n+1)$-ten Schnitt alle anderen n Schnitte trifft?

Zwischen je zwei getroffenen Schnitten befindet sich ein Stück Pizza und vor dem ersten und nach dem letzten Schnitt jeweils auch eins. Im Bild haben wir mit dem 5. Schnitt alle anderen 4 getroffen. Dadurch sind 5 neue Stücke entstanden.

Info

Natürlich ist das letzte Beispiel eher unüblich und mehr als Motivation für euch gedacht :-)

Auf den nächsten Folien gibt es Rezepte, Beispiele und Quizfragen zu folgenden Klassen von Aussagen:

- Summen und Produkte (ab Folie 519),
- Rekursionsgleichungen (ab Folie 537),
- Teilbarkeitsaussagen (ab Folie 551).

Rezept

Frage: Wie beweist man eine Aussage $A(n)$ über eine Summe $\sum_{k=n_0}^{n} a_k$ bzw. über ein Produkt $\prod_{k=n_0}^{n} a_k$?

Methode:

I.A. n_0 für n einsetzen und die Aussage $A(n_0)$ überprüfen.

I.V. „Angenommen, es gilt $A(n)$ für ein beliebiges, aber festes $n \geq n_0$."

I.S. Die Aussage $A(n+1)$ auf $A(n)$ mit folgendem Trick zurückführen und die I.V. auf $\sum_{k=n_0}^{n} a_k$ bzw. $\prod_{k=n_0}^{n} a_k$ anwenden:

$$\sum_{k=n_0}^{n+1} a_k = \underbrace{a_1 + \ldots + a_n}_{\sum_{k=n_0}^{n} a_k} + a_{n+1} = \sum_{k=n_0}^{n} a_k + a_{n+1}$$

$$\prod_{k=n_0}^{n+1} a_k = \underbrace{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n}_{\prod_{k=n_0}^{n} a_k} \cdot a_{n+1} = \prod_{k=n_0}^{n} a_k \cdot a_{n+1}$$

Beispiel

Satz:

Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt: $\sum_{k=0}^{n} 2^k = 2^{n+1} - 1$.

Beweis:

I.A. Für $n = 0$: $\sum_{k=0}^{0} 2^k = 2^0 = 1 = 2 - 1 = 2^{0+1} - 1$. ✓

I.V. Angenommen, es gilt $\sum_{k=0}^{n} 2^k = 2^{n+1} - 1$ für ein beliebiges, aber festes $n \in \mathbb{N}_0$.

I.S.

$$\sum_{k=0}^{n+1} 2^k = \sum_{k=0}^{n} 2^k + 2^{n+1} \overset{\text{I.V.}}{=} (2^{n+1} - 1) + 2^{n+1} = 2 \cdot 2^{n+1} - 1 = 2^{n+2} - 1.$$

□

Noch ein Beispiel

Satz:

Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

Beweis:

I.A. Für $n = 1$: $\sum_{k=1}^{1} k = 1 = \frac{1 \cdot (1+1)}{2}$. ✓

I.V. Angenommen, es gilt $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ für ein beliebiges, aber festes $n \in \mathbb{N}$.

I.S.

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \sum_{k=1}^{n} k + n + 1 \overset{\text{I.V.}}{=} \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 = \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

□

Ein letztes Beispiel

Satz:

Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt: $\prod_{k=0}^{n} 9^k = 3^{n(n+1)}$.

Beweis:

I.A. Für $n = 0$: $\prod_{k=0}^{0} 9^k = 9^0 = 1 = 3^0 = 3^{0(0+1)}$. ✓

I.V. Angenommen, es gilt $\prod_{k=0}^{n} 9^k = 3^{n(n+1)}$ für ein beliebiges, aber festes $n \in \mathbb{N}$.

I.S.

$$\begin{aligned}\prod_{k=0}^{n+1} 9^k &= \prod_{k=0}^{n} 9^k \cdot 9^{n+1} \overset{\text{I.V.}}{=} 3^{n(n+1)} \cdot 9^{n+1} = 3^{n(n+1)} \cdot 3^{2(n+1)} \\ &= 3^{n(n+1)+2(n+1)} = 3^{n^2+3n+2} = 3^{(n+1)(n+2)}.\end{aligned}$$

□

Quizfrage

Wie kann folgender Satz mit vollständiger Induktion bewiesen werden?

Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ *gilt:* $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^{k+1}} = 1 - \frac{1}{2^{n+1}}$.

Antwort

Beweis:

I.A. Für $n = 0$: $\sum_{k=0}^{0} \frac{1}{2^{k+1}} = \frac{1}{2^{0+1}} = \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2^{0+1}}$ ✓

I.V. Angenommen, es gilt $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^{k+1}} = 1 - \frac{1}{2^{n+1}}$ für ein beliebiges, aber festes $n \in \mathbb{N}_0$.

I.S.

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{2^{k+1}} &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^{k+1}} + \frac{1}{2^{n+2}} \overset{\text{I.V.}}{=} \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) + \frac{1}{2^{n+2}} \\ &= 1 - \frac{2}{2^{n+2}} + \frac{1}{2^{n+2}} = 1 - \frac{1}{2^{n+2}}\end{aligned}$$

□

Quizfrage

Wie kann folgender Satz mit vollständiger Induktion bewiesen werden?

Für alle $n \in \mathbb{N}$ *gilt:* $\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2$.

Antwort

Beweis:

I.A. Für $n =: \sum_{k=1}^{1}(2k-1) = 2 \cdot 1 - 1 = 1 = 1^2$ ✓

I.V. Angenommen, es gilt $\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2$ für ein beliebiges, aber festes $n \in \mathbb{N}$.

I.S.

$$\sum_{k=1}^{n+1}(2k-1) = \sum_{k=1}^{n}(2k-1) + 2(n+1) - 1 \overset{\text{I.V.}}{=} n^2 + 2(n+1) - 1 = (n+1)^2.$$

□

Quizfrage

Sei $q \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ beliebig. Wie kann folgender Satz mit vollständiger Induktion bewiesen werden?

Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ *gilt:* $\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}$.

Antwort

Beweis: Sei $q \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ beliebig.

I.A. Für $n = 0$: $\sum_{k=0}^{0} q^k = q^0 = 1 = \frac{q^{0+1}-1}{q-1}$. ✓

I.V. Angenommen, es gilt $\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}$ für ein beliebiges, aber festes $n \in \mathbb{N}_0$.

I.S.

$$\sum_{k=0}^{n+1} q^k = \sum_{k=0}^{n} q^k + q^{n+1} \overset{\text{I.V.}}{=} \frac{q^{n+1}-1}{q-1} + q^{n+1} = \frac{q^{n+1}-1+q^{n+1}(q-1)}{q-1} = \frac{q^{n+2}-1}{q-1}.$$

□

Quizfrage

Wie kann folgender Satz mit vollständiger Induktion bewiesen werden?

Für alle $n \in \mathbb{N}$ *gilt:* $\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2 = \frac{4n^3-n}{3}$.

Antwort

Beweis:

I.A. Für $n = 1$: $\sum_{k=1}^{1}(2k-1)^2 = (2\cdot 1 - 1)^2 = 1 = \frac{4\cdot 1^3 - 1}{3}$. ✓

I.V. Angenommen, es gilt $\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2 = \frac{4n^3-n}{3}$ für ein beliebiges, aber festes $n \in \mathbb{N}$.

I.S.

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1}(2k-1)^2 &= \sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2 + (2(n+1)-1)^2 \overset{\text{I.V.}}{=} \frac{4n^3-n}{3} + (2(n+1)-1)^2 \\ &= \frac{4n^3 - n + 3(2n+1)^2}{3} = \frac{4n^3 + 12n^2 + 12n - n + 3}{3} \\ &= \frac{4(n^3+3n^2+3n+1) - (n+1)}{3} = \frac{4(n+1)^3 - (n+1)}{3}.\end{aligned}$$

□

Quizfrage

Wie kann folgender Satz mit vollständiger Induktion bewiesen werden?

Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ *und* $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ *gilt:* $\prod_{k=0}^{n} \left(1 + x^{\left(2^k\right)}\right) = \frac{1-x^{\left(2^{n+1}\right)}}{1-x}$.

Antwort

Beweis: Sei $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ beliebig.

I.A. Für $n = 0$: $\prod_{k=0}^{0} \left(1 + x^{\left(2^k\right)}\right) = 1 + x^{\left(2^0\right)} = 1 + x = \frac{(1+x)(1-x)}{1-x} = \frac{1-x^{\left(2^{0+1}\right)}}{1-x}$. ✓

I.V. Angenommen, es gilt $\prod_{k=0}^{n} \left(1 + x^{\left(2^k\right)}\right) = \frac{1-x^{\left(2^{n+1}\right)}}{1-x}$ für ein beliebiges, aber festes $n \in \mathbb{N}_0$.

I.S.

$$\prod_{k=0}^{n+1} \left(1 + x^{\left(2^k\right)}\right) = \prod_{k=0}^{n} \left(1 + x^{\left(2^k\right)}\right) \cdot \left(1 + x^{\left(2^{n+1}\right)}\right) \overset{\text{I.V.}}{=} \frac{1 - x^{\left(2^{n+1}\right)}}{1 - x} \cdot \left(1 + x^{\left(2^{n+1}\right)}\right)$$

$$= \frac{\left(1 - x^{\left(2^{n+1}\right)}\right)\left(1 + x^{\left(2^{n+1}\right)}\right)}{1 - x} \overset{(*)}{=} \frac{1 - \left(x^{\left(2^{n+1}\right)}\right)^2}{1 - x} = \frac{1 - x^{\left(2^{n+2}\right)}}{1 - x}.$$

Bei $(*)$ wurde die dritte binomische Formel benutzt: $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$. □

Quizfrage

Seien $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ beliebige reelle Zahlen mit $a_1, \ldots, a_n > 0$. Wie kann folgender Satz mit vollständiger Induktion bewiesen werden?

Für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ gilt: $\prod_{k=1}^{n}(1 + a_k) > 1 + \prod_{k=1}^{n} a_k$.

Antwort

Beweis: Seien $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ beliebige reelle Zahlen mit $a_1, \ldots, a_n > 0$.

I.A. Für $n = 2$: $(1 + a_1) \cdot (1 + a_2) = 1 + \underbrace{a_1 + a_2}_{>0} + a_1 \cdot a_2 > 1 + a_1 \cdot a_2$. ✓

I.V. Angenommen, es gilt $\prod_{k=1}^{n}(1 + a_k) > 1 + \prod_{k=1}^{n} a_k$ für ein beliebiges aber festes $n \geq 2$.

I.S.

$$\begin{aligned}\prod_{k=1}^{n+1}(1 + a_k) &= \prod_{k=1}^{n}(1 + a_k) \cdot (1 + a_{n+1}) \\ &\overset{\text{I.V.}}{>} \left(1 + \prod_{k=1}^{n} a_k\right) \cdot (1 + a_{n+1}) \\ &= 1 + \underbrace{\prod_{k=1}^{n} a_k + a_{n+1}}_{>0} + \prod_{k=1}^{n+1} a_k > 1 + \prod_{k=1}^{n+1} a_k\end{aligned}$$

Quizfrage

Seien $A_1, \ldots, A_n$ beliebige Mengen. Wie kann folgender Satz mit vollständiger Induktion bewiesen werden?

Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\overline{\bigcup_{k=1}^{n} A_k} = \bigcap_{k=1}^{n} \overline{A_k}.$$

Hinweise:

- Der Fall $n = 2$ entspricht genau der Regel von De Morgan: $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$. Diese darf als bewiesen angenommen und im Beweis benutzt werden.
- Der Ausdruck $\bigcup_{k=1}^{n} A_k$ ist zwar weder eine Summe noch ein Produkt, aber das Prinzip lässt sich hier auch anwenden ;-)

Antwort

Beweis: Sei $A_1, A_2, \ldots$ eine Folge beliebiger Mengen.

I.A. Für $n = 1$: $n \in \mathbb{N}$: $\overline{\bigcup_{k=1}^{1} A_k} = \overline{A_1} = \bigcap_{k=1}^{1} \overline{A_k}$. ✓

I.V. Angenommen, es gilt $\overline{\bigcup_{k=1}^{n} A_k} = \bigcap_{k=1}^{n} \overline{A_k}$ für ein beliebiges, aber festes $n \in \mathbb{N}$.

I.S.

$$\overline{\bigcup_{k=0}^{n+1} A_k} = \overline{\bigcup_{k=0}^{n} A_k \cup A_{n+1}} \overset{(*)}{=} \overline{\bigcup_{k=0}^{n} A_k} \cap \overline{A_{n+1}} \overset{\text{I.V.}}{=} \bigcap_{k=0}^{n} \overline{A_k} \cap \overline{A_{n+1}} = \bigcap_{k=0}^{n+1} \overline{A_k}.$$

Bei $(*)$ wurde die Regel von De Morgan benutzt. □

Rekursionsgleichungen

Sei $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$ eine beliebige Funktion und $n \in \mathbb{N}_0$. Eine Rekursionsgleichung vom Grad d ist eine Gleichung, die den Funktionswert $f(n+1)$ in Abhängigkeit von $f(n), f(n-1), \ldots, f(n-d+1)$ darstellt. Gibt man zu einer solchen Rekursionsgleichung auch die sogenannten Anfangsbedingungen $f(0), f(1), \ldots, f(d-1)$ mit an, so wird f eindeutig definiert.

Beispiel

Die Funktion $f(n) = n^2$ kann durch die Rekursionsgleichung

$$f(n+1) = 3f(n) - 3f(n-1) + f(n-2)$$

vom Grad 3 mit Anfangsbedingungen $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ und $f(2) = 4$ definiert werden.

Es gilt $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $f(2) = 4$ und:

$$\begin{array}{rcrcl}
f(3) & = & 3f(2) - 3f(1) + f(0) & = & 9 \\
f(4) & = & 3f(3) - 3f(2) + f(1) & = & 16 \\
f(5) & = & 3f(4) - 3f(3) + f(2) & = & 25 \\
f(6) & = & 3f(5) - 3f(4) + f(3) & = & 36 \\
f(7) & = & 3f(6) - 3f(5) + f(4) & = & 49 \\
f(8) & = & 3f(7) - 3f(6) + f(5) & = & 64 \\
 & \vdots & & &
\end{array}$$

Rezept

Frage: Sei $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Wie beweist man, zu einer gegeben Rekursionsgleichung von Grad d für f mit Anfangsbedingungen $f(0), f(1), \ldots, f(d-1)$, eine Aussage $A(n)$ über $f(n)$?

Methode:

I.A. $A(n)$ für $n = 0, \ldots, d-1$ mithilfe der Anfangsbedingungen überprüfen.

I.V. „Angenommen, es gelten $A(n), A(n-1), \ldots, A(n-d+1)$ für ein beliebiges, aber festes $n \geq d-1$."

I.S. Mithilfe der Rekursionsgleichung $f(n+1)$ auf $f(n), f(n-1), \ldots, f(n-d+1)$ zurückführen und die I.V. auf sie alle anwenden.

Info

Der entstehende Domino-Effekt bei solchen Beweisen ist:

$$
\begin{aligned}
A(0), \ldots, A(d-1) &\overset{A(0),\ldots,A(d-1)}{\Longrightarrow} A(d) \\
&\overset{A(1),\ldots,A(d)}{\Longrightarrow} A(d+1) \\
&\overset{A(2),\ldots,A(d+1)}{\Longrightarrow} A(d+2) \\
&\overset{A(3),\ldots,A(d+2)}{\Longrightarrow} A(d+3) \\
&\overset{A(4),\ldots,A(d+3)}{\Longrightarrow} A(d+4) \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Beispiel

Satz:

Sei $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ *eine Funktion mit* $f(0) = 0$ *und*

$$f(n+1) = f(n) + 2n + 1$$

für alle $n \geq 0$. *Dann gilt für alle* $n \in \mathbb{N}_0$: $f(n) = n^2$.

Der Grad dieser Rekursionsgleichung ist 1.

Beweis:

I.A. Für $n = 0$: $f(0) = 0 = 0^2$. ✓

I.V. Angenommen, es gilt $f(n) = n^2$ für ein beliebiges aber festes $n \in \mathbb{N}_0$.

I.S.

$$f(n+1) = f(n) + 2n + 1 \overset{\text{I.V.}}{=} n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2.$$

□

Noch ein Beispiel

Satz:

Sei $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ *eine Funktion mit* $f(0) = 1$, $f(1) = 3$, $f(2) = 5$ *und*

$$f(n+1) = 3f(n) - 3f(n-1) + f(n-2)$$

für alle $n \geq 3$. *Dann gilt für alle* $n \in \mathbb{N}_0$: $f(n) = 2n + 1$.

Der Grad dieser Rekursionsgleichung ist 3.

Beweis:

I.A.

$$\begin{aligned} n = 0: &\quad f(0) = 2 \cdot 0 + 1 = 1 \quad \checkmark \\ n = 1: &\quad f(1) = 2 \cdot 1 + 1 = 3 \quad \checkmark \\ n = 2: &\quad f(2) = 2 \cdot 2 + 1 = 5 \quad \checkmark \end{aligned}$$

I.V. Angenommen, es gelten die Gleichungen

$$f(n) = 2n + 1, \quad f(n-1) = 2(n-1) + 1, \quad f(n-2) = 2(n-2) + 1$$

für ein beliebiges, aber festes $n \in \mathbb{N}_0$ mit $n \geq 3$.

I.S.

$$\begin{aligned} f(n+1) &= 3f(n) - 3f(n-1) + f(n-2) \\ &\overset{\text{I.V.}}{=} 3(2n+1) - 3(2(n-1)+1) + (2(n-2)+1) = 2n + 3 = 2(n+1) + 1. \end{aligned}$$

Ein letztes Beispiel

Satz:

Sei $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ *eine Funktion mit* $f(0) = 0$, $f(1) = 4$ *und*

$$f(n+1) = 2f(n) + 3f(n-1)$$

für alle $n \geq 2$. *Dann ist* $f(n)$ *für alle* $n \in \mathbb{N}_0$ *gerade.*

Der Grad dieser Rekursionsgleichung ist 2.

Beweis:

I.A.

$$n = 0: \quad f(0) = 0 \text{ ist gerade } \checkmark$$
$$n = 1: \quad f(1) = 4 \text{ ist gerade } \checkmark$$

I.V. Angenommen, $f(n)$ und $f(n-1)$ sind für ein beliebiges, aber festes $n \in \mathbb{N}_0$ mit $n \geq 2$ beide gerade.

I.S. Weil $f(n)$ und $f(n-1)$ laut I.V. gerade sind, sind auch $2f(n)$ und $3f(n-1)$ gerade. Daraus folgt, dass $f(n+1) = 2f(n) + 3f(n-1)$ ebenfalls gerade ist, da die Summe von geraden Zahlen wieder gerade ist. $\square$

Quizfrage

Sei $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ eine Funktion mit $f(0) = 0$, $f(1) = 2$ und

$$f(n+1) = 3f(n) - 2f(n-1)$$

für alle $n \geq 1$.

Wie kann man mit vollständiger Induktion beweisen, dass $f(n) = 2^{n+1} - 2$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt?

Hinweis: Die Rekursionsgleichung hat Grad 2.

Antwort

Beweis:

I.A.

$$n = 0: \quad f(0) = 2^1 - 2 = 2 - 2 = 0 \quad \checkmark$$
$$n = 1: \quad f(1) = 2^2 - 2 = 4 - 2 = 2 \quad \checkmark$$

I.V. Angenommen, es gelten die Gleichungen

$$f(n) = 2^{n+1} - 2 \quad \text{und} \quad f(n-1) = 2^n - 2$$

für ein beliebiges, aber festes $n \geq 1$.

I.S.

$$\begin{aligned} f(n+1) &= 3f(n) - 2f(n-1) \overset{\text{I.V.}}{=} 3(2^{n+1} - 2) - 2(2^n - 2) \\ &= 3 \cdot 2^{n+1} - 6 - 2 \cdot 2^n + 4 = 3 \cdot 2^{n+1} - 2^{n+1} - 2 \\ &= (3-1)2^{n+1} - 2 = 2 \cdot 2^{n+1} - 2 = 2^{n+2} - 2 \end{aligned}$$

□

Quizfrage

Ein Gartenzaun besteht aus n nebeneinander stehenden Pfählen. Jeder Pfahl soll mit einer der Farben gelb, rot und blau so gestrichen werden, dass die Anzahl an blauen Pfählen gerade ist. Sei $f(n)$ die Anzahl an Farbkombinationen bei n Pfählen.

1. Wieso gilt $f(n+1) = f(n) + 3^n$ mit $f(1) = 2$?
2. Wie kann man mit vollständiger Induktion die Gleichung $f(n) = \frac{3^n+1}{2}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ zeigen?

Hinweise zu 1.:

- Stell $f(n+1)$ zunächst in Abhängigkeit von $f(n)$ dar.
- Für n Pfähle gibt es insgesamt 3^n Farbkombinationen. Bei $f(n)$ davon ist die Anzahl an blauen Pfählen gerade, bei $3^n - f(n)$ ungerade.

Antwort

1. Möchte man $n+1$ Pfähle farbig streichen, so muss man für den $(n+1)$-ten Pfahl folgende drei Fälle betrachten:

$$(\underbrace{?,?,\ldots,?}_{\text{blau gerade}},g) \qquad (\underbrace{?,?,\ldots,?}_{\text{blau gerade}},r) \qquad (\underbrace{?,?,\ldots,?}_{\text{blau ungerade}},b).$$

Für die ersten zwei Fälle gibt es jeweils $f(n)$ Möglichkeiten, für den dritten sind es $3^n - f(n)$. Wir erhalten also die Formel

$$f(n+1) = f(n) + f(n) + 3^n - f(n).$$

Es folgt $f(n+1) = f(n) + 3^n$ mit $f(1) = 2$.

2. Beweis:

I.A. Für $n = 1$: $f(1) = 2 = \frac{3^1+1}{2}$. ✓

I.V. Angenommen, es gilt $f(n) = \frac{3^n+1}{2}$ für ein beliebiges aber festes $n \in \mathbb{N}$.

I.S.

$$f(n+1) = f(n) + 3^n \overset{\text{I.V.}}{=} \frac{3^n+1}{2} + 3^n = \frac{3^n+1+2\cdot 3^n}{2} = \frac{3\cdot 3^n+1}{2} = \frac{3^{n+1}+1}{2}.$$

□

Rezept

Frage: Gegeben sei eine Zahl $x \in \mathbb{Z}$ und eine Funktion $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{Z}$. Wie beweist man eine Aussage $A(n)$ der Form „$f(n)$ ist für alle $n \in \mathbb{N}_0$ durch x teilbar“?

Methode: Für beliebige $x, y \in \mathbb{Z}$ gilt:

$$x \mid y \quad :\Longleftrightarrow \quad \exists k \in \mathbb{Z} : y = k \cdot x$$

(s. Folie 150).

I.A. 0 für n einsetzen und die Aussage $x \mid f(0)$ überprüfen.

I.V. „Angenommen, es gilt $x \mid f(n)$ für ein beliebiges, aber festes $n \geq 0$, d.h. es gibt ein $k \in \mathbb{Z}$ mit $f(n) = k \cdot x$.“

I.S. Den Ausdruck $f(n+1)$ auf $f(n)$ zurückführen und die I.V. auf $f(n)$ anwenden.

Beispiel

Satz:

Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt: $3 \mid n^3 + 2n$.

Beweis:

I.A. Für $n = 0$: Es gilt $0^3 + 2 \cdot 0 = 0$ und $3 \mid 0$. ✓

I.V. Angenommen, es gibt für ein beliebiges aber festes $n \in \mathbb{N}_0$ ein $k \in \mathbb{Z}$ mit $n^3 + 2n = k \cdot 3$.

I.S.

$$\begin{aligned}(n+1)^3 + 2(n+1) &= n^3 + 3n^2 + 3n + 1 + 2n + 2 \\ &= n^3 + 2n + (n^2 + n + 1) \cdot 3 \\ &\overset{\text{I.V.}}{=} k \cdot 3 + (n^2 + n + 1) \cdot 3 \\ &= (k + n^2 + n + 1) \cdot 3\end{aligned}$$

Es gibt also ein $k' \in \mathbb{Z}$ mit $(n+1)^3 + 2(n+1) = k' \cdot 3$, nämlich $k' = k + n^2 + n + 1$. □

Noch ein Beispiel

Satz:

Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ *gilt:* $5 \mid (-2)^n + 4 \cdot 3^n$.

Beweis:

I.A. Für $n = 0$: Es gilt $(-2)^0 + 4 \cdot 3^0 = 1 + 4 \cdot 1 = 5$ und $5 \mid 5$. ✓

I.V. Angenommen, es gibt für ein beliebiges aber festes $n \in \mathbb{N}_0$ ein $k \in \mathbb{Z}$ mit $(-2)^n + 4 \cdot 3^n = k \cdot 5$.

I.S.

$$\begin{aligned}
(-2)^{n+1} + 4 \cdot 3^{n+1} &= -2 \cdot (-2)^n + 3 \cdot 4 \cdot 3^n \\
&= (-5 + 3) \cdot (-2)^n + 3 \cdot 4 \cdot 3^n \\
&= -5 \cdot (-2)^n + 3 \cdot (-2)^n + 3 \cdot 4 \cdot 3^n \\
&= -5 \cdot (-2)^n + 3 \cdot ((-2)^n + 4 \cdot 3^n) \\
&\overset{\text{I.V.}}{=} -5 \cdot (-2)^n + 3 \cdot k \cdot 5 \\
&= (-1 \cdot (-2)^n + 3 \cdot k) \cdot 5
\end{aligned}$$

Es gibt also ein $k' \in \mathbb{Z}$ mit $(-2)^{n+1} + 4 \cdot 3^{n+1} = k' \cdot 5$, nämlich $k' = -1 \cdot (-2)^n + 3 \cdot k$. □

Letztes Beispiel

Satz:

Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ *gilt:* $19 \mid 5 \cdot 2^{3n+1} + 3^{3n+2}$.

Beweis:

I.A. Für $n = 0$: Es gilt $5 \cdot 2^{3 \cdot 0+1} + 3^{3 \cdot 0+2} = 5 \cdot 2 + 3^2 = 19$ und $19 \mid 19$. ✓

I.V. Angenommen, es gibt für ein beliebiges aber festes $n \in \mathbb{N}_0$ ein $k \in \mathbb{Z}$ mit

I.S. $5 \cdot 2^{3n+1} + 3^{3n+2} = k \cdot 19$.

$$\begin{aligned}
5 \cdot 2^{3(n+1)+1} + 3^{3(n+1)+2} &= 8 \cdot 5 \cdot 2^{3n+1} + 27 \cdot 3^{3n+2} \\
&= (-19 + 27) \cdot 5 \cdot 2^{3n+1} + 27 \cdot 3^{3n+2} \\
&= -19 \cdot 5 \cdot 2^{3n+1} + 27 \cdot 5 \cdot 2^{3n+1} + 27 \cdot 3^{3n+2} \\
&= -19 \cdot 5 \cdot 2^{3n+1} + 27 \cdot (5 \cdot 2^{3n+1} + 3^{3n+2}) \\
&\overset{\text{I.V}}{=} -19 \cdot 5 \cdot 2^{3n+1} + 27 \cdot k \cdot 19 \\
&= (-5 \cdot 2^{3n+1} + 27 \cdot k) \cdot 19
\end{aligned}$$

Es gibt also ein $k' \in \mathbb{Z}$ mit $5 \cdot 2^{3(n+1)+1} + 3^{3(n+1)+2} = k' \cdot 19$, nämlich $k' = -5 \cdot 2^{3n+1} + 27 \cdot k$. □

Quizfrage

Wie kann man mit vollständiger Induktion zeigen, dass $5^n - 2^n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ durch 3 teilbar ist?

Antwort

Beweis:

I.A. Für $n = 0$: Es gilt $5^0 - 2^0 = 1 - 1 = 0$ und $3 \mid 0$. ✓

I.V. Angenommen, es gibt für ein beliebiges aber festes $n \in \mathbb{N}_0$ ein $k \in \mathbb{Z}$ mit $5^n - 2^n = k \cdot 3$.

I.S.

$$\begin{aligned} 5^{n+1} - 2^{n+1} &= 5 \cdot 5^n - 2 \cdot 2^n \\ &= (3+2) \cdot 5^n - 2 \cdot 2^n \\ &= 3 \cdot 5^n + 2 \cdot 5^n - 2 \cdot 2^n \\ &= 3 \cdot 5^n + 2 \cdot (5^n - 2^n) \\ &\overset{\text{I.V.}}{=} 3 \cdot 5^n + 2 \cdot k \cdot 3 \\ &= (5^n + 2 \cdot k) \cdot 3 \end{aligned}$$

Es gibt also ein $k' \in \mathbb{Z}$ mit $5^{n+1} - 2^{n+1} = k' \cdot 3$, nämlich $5^n + 2 \cdot k$. □

Info

Noch nicht genug gehabt? Noch durstig nach Induktionsaufgaben? Versuchts doch hiermit:

`http://www.emath.de/Referate/induktion-aufgaben-loesungen.pdf`

Themengebiete A-E sind für uns interessant.

Starke Induktion

Die starke Induktion funktioniert analog zur vollständigen Induktion mit dem Unterschied, dass der Induktionsschritt die Gestalt

$$\forall n \geq n_0 : (A(n_0), \ldots, A(n)) \Longrightarrow A(n+1)$$

hat. D.h. man hat eine Menge $\{A(n_0), \ldots, A(n)\}$ von Annahmen zur Verfügung, von denen man beliebig viele benutzen darf.

Die vollständige Induktion ist ein Spezialfall der starken Induktion.

Info

Starke Induktion ist ein super spannendes Thema, aber leider für DS nicht relevant ;-)

Beispiel

Satz:

Sei $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ eine Funktion mit $f(0) = 1$ und $f(n+1) = 1 + \sum_{k=0}^{n} f(k)$. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}_0$: $f(n) = 2^n$.

Beweis:

I.A. Für $n = 0$: $f(0) = 1 = 2^0$. ✓

I.V. Angenommen, es gilt für ein beliebiges aber festes $n \in \mathbb{N}_0$ die Gleichung $f(k) = 2^k$ für alle $k = 0, \ldots, n$, d.h.:

$$f(0) = 1, \quad f(1) = 2, \quad f(2) = 4, \quad \ldots, \quad f(n) = 2^n.$$

I.S.

$$f(n+1) = 1 + \sum_{k=0}^{n} f(k) \overset{\text{I.V.}}{=} 1 + \sum_{k=0}^{n} 2^k \overset{(*)}{=} 1 + (2^{n+1} - 1) = 2^{n+1}$$

$(*)$ siehe Folie 520. □

Themenübersicht

Themenübersicht

Funktionen auf der Überholspur

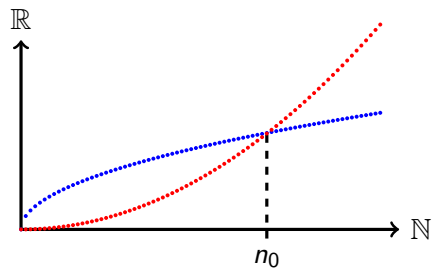
Der Ausdruck

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : f(n) > g(n)$$

bedeutet für Funktionen $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, dass $f(n)$ an einer bestimmten Stelle die Funktion $g(n)$ überholt und ab dann immer größer ist. Analog für $\leq$, $<$ und $\geq$.

Beispiel

$f(n)$ überholt $g(n)$:



rot: $f(n)$, blau: $g(n)$.

Info

Es gibt auch Funktionen f und g bei denen keine die andere überholt. Dies passiert z.B. bei Funktionen die „hin- und herschwingen“. Solche Funktionen sind typischerweise

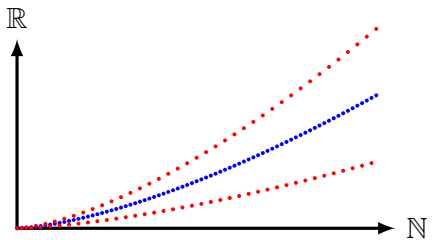
$$f(n) = (-1)^n, \qquad f(n) = \sin(n), \qquad f(n) = \cos(n)$$

oder Funktionen, die etwa so definiert sein könnten:

$$f(n) = \begin{cases} \dots, & \text{falls } n \text{ gerade} \\ \dots, & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases}.$$

Beispiel

$f(n)$ und $g(n)$ überholen sich gegenseitig nicht:

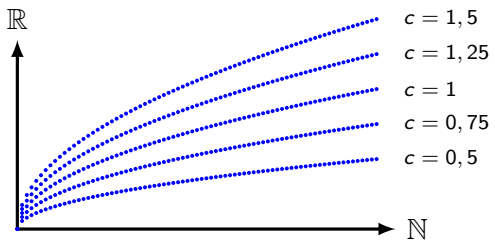


rot: $f(n)$, blau: $g(n)$.

Konstante Faktoren

Sei $c \in \mathbb{R}^+$. Die Kurve von $c \cdot g(n)$ ist nichts anderes als die von $g(n)$, aber senkrecht gestreckt (falls $c > 1$) bzw. gestaucht (falls $c < 1$).

Beispiel



blau: $c \cdot g(n)$ für verschiedene $c \in \mathbb{R}^+$.

Info

$\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ ist die Menge aller positiven reellen Zahlen.

Klein-O

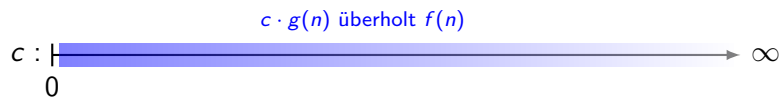
Seien $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ beliebige Funktionen. Dann gilt:

$$f \in o(g) \quad :\Longleftrightarrow \quad \forall c \in \mathbb{R}^+ : \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : |f(n)| < c \cdot g(n) \ .$$

Wir sagen „f wächst langsamer als g“ und schreiben oft auch $f \prec g$.

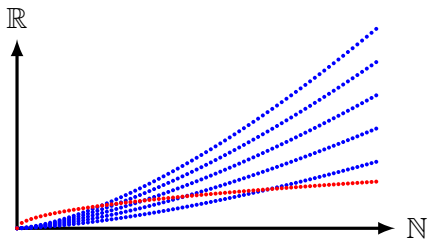
Intuition

$o(g)$ enthält alle Funktionen f, die für alle $c \in \mathbb{R}^+$ von $c \cdot g(n)$ überholt werden.



Beispiel

Für folgende Funktionen gilt: $f \in o(g)$.



rot: $f(n)$, blau: $c \cdot g(n)$ für verschiedene $c \in \mathbb{R}^+$

Klein-Omega

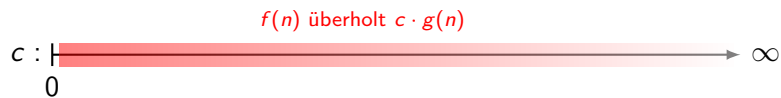
Seien $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ beliebige Funktionen. Dann gilt:

$$f \in \omega(g) \quad :\iff \quad \forall c \in \mathbb{R}^+ : \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : |f(n)| > c \cdot g(n) \ .$$

Wir sagen „f wächst schneller als g“ und schreiben oft auch $f \succ g$.

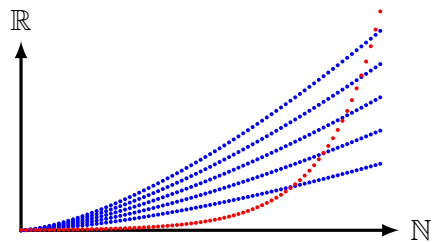
Intuition

$\omega(g)$ enthält alle Funktionen f, die für alle $c \in \mathbb{R}^+$ die Funktion $c \cdot g(n)$ überholen.



Beispiel

Für folgende Funktionen gilt: $f \in \omega(g)$.



rot: $f(n)$, blau: $c \cdot g(n)$ für verschiedene $c \in \mathbb{R}^+$

Groß-O

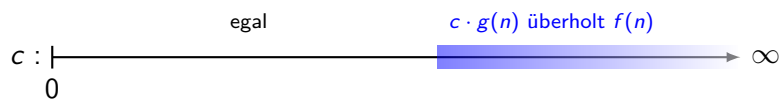
Seien $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ beliebige Funktionen. Dann gilt:

$$f \in \mathcal{O}(g) \quad :\Longleftrightarrow \quad \exists c \in \mathbb{R}^+ : \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : |f(n)| \leq c \cdot g(n) \ .$$

Wir sagen „f wächst nicht schneller als g“ und schreiben oft auch $f \preceq g$.

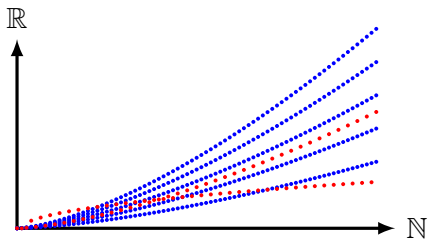
Intuition

$\mathcal{O}(g)$ enthält alle Funktionen f, die für einige $c \in \mathbb{R}^+$ von $c \cdot g(n)$ überholt werden.



Beispiel

Für folgende Funktionen gilt: $f \in \mathcal{O}(g)$.



rot: $f(n)$, blau: $c \cdot g(n)$ für verschiedene $c \in \mathbb{R}^+$

Groß-Omega

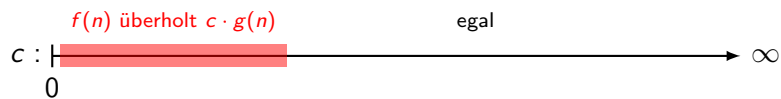
Seien $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ beliebige Funktionen. Dann gilt:

$$f \in \Omega(g) \quad :\Longleftrightarrow \quad \exists c \in \mathbb{R}^+ : \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : |f(n)| \geq c \cdot g(n) \ .$$

Wir sagen „f wächst nicht langsamer als g“ und schreiben oft auch $f \succeq g$.

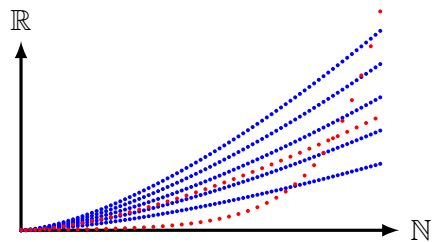
Intuition

$\Omega(g)$ enthält alle Funktionen f, die für einige $c \in \mathbb{R}^+$ die Funktion $c \cdot g(n)$ überholen.



Beispiel

Für folgende Funktionen gilt: $f \in \Omega(g)$.



rot: $f(n)$, blau: $c \cdot g(n)$ für verschiedene $c \in \mathbb{R}^+$

Theta

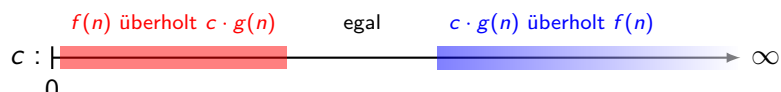
Seien $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ beliebige Funktionen. Dann gilt:

$$f \in \Theta(g) \quad :\Longleftrightarrow \quad f \in \mathcal{O}(g) \text{ und } f \in \Omega(g) \ .$$

Wir sagen „f wächst so schnell wie g“ und schreiben oft auch $f \sim g$.

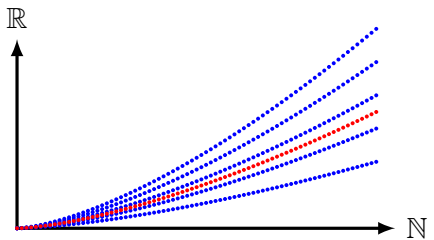
Intuition

$\Theta(g)$ enthält alle Funktionen, die $c \cdot g(n)$ für einige $c \in \mathbb{R}^+$ überholen und für andere $c \in \mathbb{R}^+$ von $c \cdot g(n)$ überholt werden.



Beispiel

Für folgende Funktionen gilt: $f \in \Theta(g)$.



rot: $f(n)$, blau: $c \cdot g(n)$ für verschiedene $c \in \mathbb{R}^+$

Infos

- Statt f und g schreiben wir öfter die Ausdrücke $f(n)$ und $g(n)$, z.B. in $n^2 \in \omega(\sqrt{n})$.
- Es kann auch passieren, dass zwei Funktionen $f(n)$ und $g(n)$ nicht vergleichbar sind!
- Statt

$$f \in o(g), \quad f \in \omega(g), \quad f \in \mathcal{O}(g), \quad f \in \Omega(g), \quad f \in \Theta(g)$$

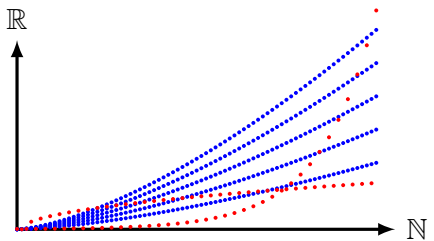
schreibt man leider auch

$$f = o(g), \quad f = \omega(g), \quad f = \mathcal{O}(g), \quad f = \Omega(g), \quad f = \Theta(g),$$

obwohl die zweite Variante formal keinen Sinn macht.

Beispiel

Folgende Funktionen sind nicht vergleichbar.



rot: $f(n)$, blau: $c \cdot g(n)$ für verschiedene $c \in \mathbb{R}^+$

D.h. keine Funktion überholt für kein $c \in \mathbb{R}^+$ die andere.

Quizfrage

$\prec$, $\succ$, $\preceq$, $\succeq$ und $\sim$ sind homogene Relationen über Funktionen. Welche Eigenschaften besitzen sie?

Hinweis: Die Eigenschaften für diese Relationen zu beweisen kann sehr nervig sein. Versuch die Frage mit Bauchgefühl zu beantworten ;-)

Antwort

- $\prec$ und $\succ$ sind antisymmetrisch, asymmetrisch und transitiv.
- $\preceq$ und $\succeq$ sind reflexiv und transitiv.
- $\sim$ ist reflexiv, symmetrisch und transitiv, also eine Äquivalenzrelation

Quizfragen

Seien $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ beliebige Funktionen.

1. Welche der folgenden Äquivalenzen sind richtig?

$$
\begin{aligned}
f \in o(g) &\iff f \in \mathcal{O}(g), \\
f \in \omega(g) &\iff f \in \Omega(g), \\
f \in \mathcal{O}(g) &\iff f \in \Theta(g), \\
f \in \Omega(g) &\iff f \in \Theta(g), \\
f \in o(|g|) &\iff g \in \omega(|f|), \\
f \in \mathcal{O}(|g|) &\iff g \in \Omega(|f|), \\
f \in \Theta(|g|) &\iff g \in \Theta(|f|).
\end{aligned}
$$

   Ersetze bei falschen Aussagen das Symbol „$\iff$“ durch „$\implies$“ oder „$\impliedby$“.
2. Kann gleichzeitig $f \in o(g)$ und $f \in \Omega(g)$ gelten?
3. Kann gleichzeitig $f \in \omega(g)$ und $f \in \mathcal{O}(g)$ gelten?

Antworten

1.

$$
\begin{array}{lcl}
f \in o(g) & \Longrightarrow & f \in \mathcal{O}(g), \\
f \in \omega(g) & \Longrightarrow & f \in \Omega(g), \\
f \in \mathcal{O}(g) & \Longleftarrow & f \in \Theta(g), \\
f \in \Omega(g) & \Longleftarrow & f \in \Theta(g), \\
f \in o(|g|) & \Longleftrightarrow & g \in \omega(|f|), \\
f \in \mathcal{O}(|g|) & \Longleftrightarrow & g \in \Omega(|f|), \\
f \in \Theta(|g|) & \Longleftrightarrow & g \in \Theta(|f|).
\end{array}
$$

2. Nö! Wir wissen:

$$\begin{aligned} f \in o(g) &\iff \forall c \in \mathbb{R}^+ : \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : |f(n)| < c \cdot g(n) \\ f \in \Omega(g) &\iff \exists c \in \mathbb{R}^+ : \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : |f(n)| \geq c \cdot g(n) \end{aligned}$$

   $f(n)$ kann nicht für alle $c \in \mathbb{R}^+$ von $c \cdot g(n)$ überholt werden und gleichzeitig $c \cdot g(n)$ für einige $c \in \mathbb{R}^+$ überholen.

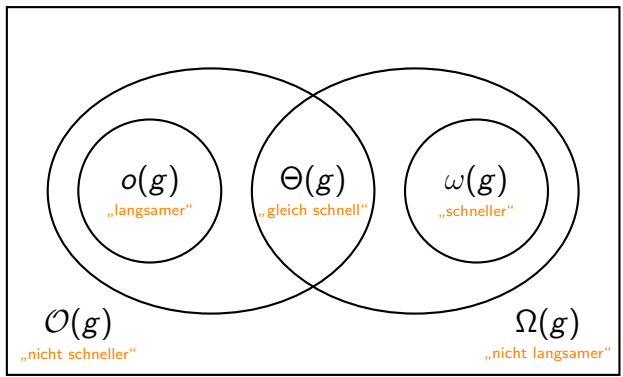
3. Genauso nö wie 2. Wir wissen:

$$\begin{aligned} f \in \omega(g) &\iff \forall c \in \mathbb{R}^+ : \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : |f(n)| > c \cdot g(n) \\ f \in \mathcal{O}(g) &\iff \exists c \in \mathbb{R}^+ : \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : |f(n)| \leq c \cdot g(n) \end{aligned}$$

   $f(n)$ kann nicht $c \cdot g(n)$ für alle $c \in \mathbb{R}^+$ überholen und gleichzeitig für einige $c \in \mathbb{R}^+$ von $c \cdot g(n)$ überholt werden.

Info

Viele Ergebnisse der letzten Quizfragen kann man an folgendem Euler-Diagramm erkennen:



Quizfrage

Seien $f_1, \ldots, f_6 : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ Funktionen mit:

$$f_1(n) = n \qquad f_4(n) = \begin{cases} n, & \text{falls } n \text{ gerade} \\ n^2, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$f_2(n) = n^2 \qquad f_5(n) = \begin{cases} n^2, & \text{falls } n \text{ gerade} \\ n^3, & \text{sonst} \end{cases}$$

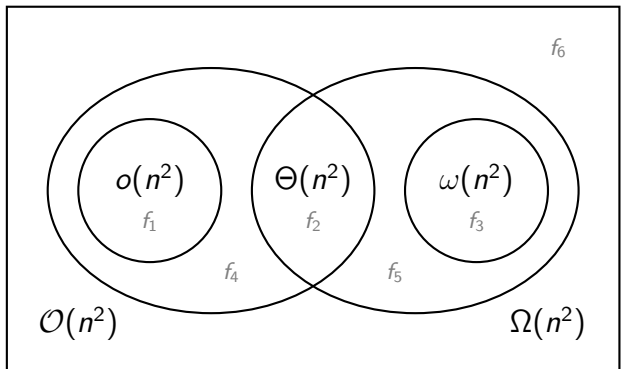
$$f_3(n) = n^3 \qquad f_6(n) = \begin{cases} n, & \text{falls } n \text{ gerade} \\ n^3, & \text{sonst} \end{cases}$$

Wie sieht das Euler-Diagramm über dem Universum $\{f_1, \ldots, f_6\}$ mit den Mengen

$$o(n^2) \qquad \omega(n^2) \qquad \mathcal{O}(n^2) \qquad \Omega(n^2) \qquad \Theta(n^2)$$

aus?

Antwort



Überblick

Hier sind nochmal alle fünf Definitionen:

$$
\begin{aligned}
f \in o(g) &\iff \forall c \in \mathbb{R}^+ : \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : |f(n)| < c \cdot g(n) \\
f \in \omega(g) &\iff \forall c \in \mathbb{R}^+ : \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : |f(n)| > c \cdot g(n) \\
f \in \mathcal{O}(g) &\iff \exists c \in \mathbb{R}^+ : \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : |f(n)| \leq c \cdot g(n) \\
f \in \Omega(g) &\iff \exists c \in \mathbb{R}^+ : \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : |f(n)| \geq c \cdot g(n) \\
f \in \Theta(g) &\iff f \in \mathcal{O}(g) \text{ und } f \in \Omega(g)
\end{aligned}
$$

Und ihre entsprechenden Negationen:

$$
\begin{aligned}
f \notin o(g) &\iff \exists c \in \mathbb{R}^+ : \forall n_0 \in \mathbb{N} : \exists n \geq n_0 : |f(n)| \geq c \cdot g(n) \\
f \notin \omega(g) &\iff \exists c \in \mathbb{R}^+ : \forall n_0 \in \mathbb{N} : \exists n \geq n_0 : |f(n)| \leq c \cdot g(n) \\
f \notin \mathcal{O}(g) &\iff \forall c \in \mathbb{R}^+ : \forall n_0 \in \mathbb{N} : \exists n \geq n_0 : |f(n)| > c \cdot g(n) \\
f \notin \Omega(g) &\iff \forall c \in \mathbb{R}^+ : \forall n_0 \in \mathbb{N} : \exists n \geq n_0 : |f(n)| < c \cdot g(n) \\
f \notin \Theta(g) &\iff f \notin \mathcal{O}(g) \text{ oder } f \notin \Omega(g)
\end{aligned}
$$

Themenübersicht

Rezept

Frage: Wie zeigt man, dass zwei gegebene Funktionen f und g in einer gegebenen Beziehung zueinander stehen? (z.B. $f \in o(g)$ oder $f \notin \Omega(g)$)

Methode:

1. Betrachte die Aussage, die bewiesen werden muss. Diese hat folgende Form:

$$Q_1\, c \in \mathbb{R}^+ : Q_2\, n_0 \in \mathbb{N} : Q_3\, n \geq n_0 : |f(n)|\, R\, c \cdot g(n),$$

   wobei $R \in \{<, >, \leq, \geq\}$ ein Vergleichsoperator und $Q_1, Q_2, Q_3 \in \{\exists, \forall\}$ Quantoren sind.

2. Finde einen konkreten Wert für jede Variable neben einem Existenzquantor $\exists$, in Abhängigkeit von allen Variablen links von ihr, die neben einem Allquantor $\forall$ stehen.

3. Die gewählten Werte sollen die Ungleichung $|f(n)|\, R\, c \cdot g(n)$ erfüllen.

Erstes Beispiel

Es soll $6n^2 \in o(2n^3)$ gezeigt werden, also:

$$\forall c \in \mathbb{R}^+ : \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : |6n^2| < c \cdot 2n^3).$$

Gesucht ist ein $n_0 \in \mathbb{N}$ in Abhängigkeit von einem beliebigen $c \in \mathbb{R}^+$, so dass die Aussage in den Klammern erfüllt ist.

Lösen der Ungleichung nach n ergibt:

$$|6n^2| < c \cdot 2n^3 \iff 6n^2 < c \cdot 2n^3 \iff \frac{3}{c} < n \Longleftarrow \frac{3}{c} + 1 \leq n.$$

Für $n_0 := \left\lceil \frac{3}{c} + 1 \right\rceil$ gilt dann:

$$n \geq n_0 \Longrightarrow |6n^2| < c \cdot 2n^3.$$

□

Info

In dem Beispiel haben wir $\frac{3}{c} + 1$ mit Gauß-Klammern $\lceil \dots \rceil$ aufgerundet, weil $\frac{3}{c} + 1$ nicht für jedes $c \in \mathbb{R}^+$ eine natürliche Zahl ist.

Zweites Beispiel

Es soll $4n^3 \in \omega(8n^2)$ gezeigt werden, also:

$$\forall c \in \mathbb{R}^+ : \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : |4n^3| > c \cdot 8n^2).$$

Gesucht ist ein $n_0 \in \mathbb{N}$ in Abhängigkeit von einem beliebigen $c \in \mathbb{R}^+$, so dass die Aussage in den Klammern erfüllt ist.

Lösen der Ungleichung nach n ergibt:

$$|4n^3| > c \cdot 8n^2 \iff 4n^3 > c \cdot 8n^2 \iff n > 2c \Longleftarrow n \geq 2c + 1.$$

Für $n_0 := \lceil 2c + 1 \rceil$ gilt dann:

$$n \geq n_0 \Longrightarrow |4n^3| > c \cdot 8n^2.$$

□

Drittes Beispiel

Es soll $n^2 + \frac{1}{10} \in \mathcal{O}(n^3 + 1)$ gezeigt werden, also:

$$\exists c \in \mathbb{R}^+ : \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : \left| n^2 + \frac{1}{10} \right| \leq c \cdot (n^3 + 1).$$

Wähle z.B. $c := \frac{1}{10}$.

Lösen der Ungleichung nach n ergibt:

$$\left| n^2 + \frac{1}{10} \right| \leq \frac{1}{10} \cdot (n^3 + 1) \iff n^2 + \frac{1}{10} \leq \frac{1}{10} n^3 + \frac{1}{10} \iff n^2 \leq \frac{1}{10} n^3 \iff 10 \leq n.$$

Für $n_0 := 10$ gilt dann:

$$n \geq n_0 \implies \left| n^2 + \frac{1}{10} \right| \leq c \cdot (n^3 + 1).$$

□

Viertes Beispiel

Es soll $n^2 + 1 \in \Omega\left(n + \frac{1}{5}\right)$ gezeigt werden, also:

$$\exists c \in \mathbb{R}^+ : \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : |n^2 + 1| \geq c \cdot \left(n + \frac{1}{5}\right).$$

Wähle z.B. $c := 5$.

Lösen der Ungleichung nach n ergibt:

$$|n^2 + 1| \geq 5 \cdot \left(n + \frac{1}{5}\right) \iff n^2 + 1 \geq 5n + 1 \iff n^2 \geq 5n \iff n \geq 5.$$

Für $n_0 := 5$ gilt dann:

$$n \geq n_0 \implies |n^2 + 1| \geq c \cdot \left(n - \frac{1}{5}\right).$$

□

Fünftes Beispiel

Es soll $3n^3 \notin o(n^2)$ gezeigt werden, also:

$$\exists c \in \mathbb{R}^+ : \forall n_0 \in \mathbb{N} : \exists n \geq n_0 : |3n^3| \geq c \cdot n^2.$$

Wähle z.B. $c := 3$.

Lösen der Ungleichung nach n ergibt:

$$|3n^3| \geq 3 \cdot n^2 \iff 3n^3 \geq 3n^2 \iff n \geq 1.$$

Nun soll ein $n \in \mathbb{N}$ in Abhängigkeit von $n_0 \in \mathbb{N}$ gewählt werden, so dass $n \geq n_0$ und $n \geq 1$ gelten, z.B.

$$n := \max\{n_0, 1\}.$$

□

Sechstes Beispiel

Es soll $2^n \notin \omega(n^n)$ gezeigt werden, also:

$$\exists c \in \mathbb{R}^+ : \forall n_0 \in \mathbb{N} : \exists n \geq n_0 : |2^n| \leq c \cdot n^n.$$

Wähle z.B. $c := 1$.

Lösen der Ungleichung nach n ergibt:

$$|2^n| \leq 1 \cdot n^n \iff 2^n \leq n^n \iff \ln(2^n) \leq \ln(n^n) \iff n \ln 2 \leq n \ln n \iff 2 \leq n.$$

Nun soll ein $n \in \mathbb{N}$ in Abhängigkeit von $n_0 \in \mathbb{N}$ gewählt werden, so dass $n \geq n_0$ und $n \geq 2$ gelten, z.B.

$$n := \lceil \max\{n_0, 2\} \rceil .$$

□

Siebtes Beispiel

Es soll $5n^2 \notin \mathcal{O}(n)$ gezeigt werden, also:

$$\forall c \in \mathbb{R}^+ : \forall n_0 \in \mathbb{N} : \exists n \geq n_0 : |5n^2| > c \cdot n.$$

Lösen der Ungleichung nach n ergibt:

$$|5n^2| > c \cdot n \iff 5n^2 > c \cdot n \iff n > \frac{c}{5} \Longleftarrow n \geq \frac{c}{5} + 1.$$

Nun soll ein $n \in \mathbb{N}$ in Abhängigkeit von $c \in \mathbb{R}^+$ und $n_0 \in \mathbb{N}$ gewählt werden, so dass $n \geq n_0$ und $n \geq \frac{c}{5} + 1$ gelten, z.B.

$$n := \left\lceil \max \left\{ n_0, \frac{c}{5} + 1 \right\} \right\rceil.$$

□

Achtes Beispiel

Es soll $n \notin \Omega(3n^2)$ gezeigt werden, also:

$$\forall c \in \mathbb{R}^+ : \forall n_0 \in \mathbb{N} : \exists n \geq n_0 : |n| < c \cdot 3n^2.$$

Lösen der Ungleichung nach n ergibt:

$$|n| < c \cdot 3n^2 \iff n < 3cn^2 \iff \frac{1}{3c} < n \Longleftarrow \frac{1}{3c} + 1 \leq n$$

Nun soll ein $n \in \mathbb{N}$ in Abhängigkeit von $c \in \mathbb{R}^+$ und $n_0 \in \mathbb{N}$ gewählt werden, so dass $n \geq n_0$ und $n \geq \frac{1}{3c} + 1$ gelten, z.B.

$$n := \left\lceil \max \left\{ n_0, \frac{1}{3c} + 1 \right\} \right\rceil.$$

□

Themenübersicht

Rechenregeln

Falls $\lim_{n\to\infty} \frac{|f(n)|}{g(n)}$ existiert und $g(n)$ ab einem bestimmten n positiv ist, dann gilt:

$$
\begin{aligned}
f \in o(g) &\iff \lim_{n\to\infty} \frac{|f(n)|}{g(n)} = 0,\\
f \in \omega(g) &\iff \lim_{n\to\infty} \frac{|f(n)|}{g(n)} = \infty,\\
f \in \mathcal{O}(g) &\iff \lim_{n\to\infty} \frac{|f(n)|}{g(n)} < \infty,\\
f \in \Omega(g) &\iff \lim_{n\to\infty} \frac{|f(n)|}{g(n)} > 0,\\
f \in \Theta(g) &\iff \lim_{n\to\infty} \frac{|f(n)|}{g(n)} = c \qquad \text{mit } 0 < c < \infty.
\end{aligned}
$$

Außerdem gilt für alle $k > 1$:

$$
n! \in \mathcal{O}(n^n), \quad 2^n \in \mathcal{O}\left(2^{2n}\right), \quad n! \in \Omega\left(\left(\tfrac{n}{e}\right)^n\right), \quad n! \in \mathcal{O}\left(\left(n \cdot \tfrac{n}{e}\right)^n\right), \quad \sum_{i=0}^{k} a_i n^i \in \mathcal{O}(n^k),
$$

$$
1 \prec \log_2 \log_2 n \prec \log_2 n \prec (\log_2 n)^k \prec n^{1/k} \prec n \prec n \log_2 n \prec n^k \prec k^n \prec n! \prec n^n.
$$

Hierarchie

Hier ist eine schönere Darstellung der Hierarchie auf der letzten Folie:

$$1 \prec \log\log n \prec (\log\log n)^2 \prec (\log\log n)^3 \prec \ldots \prec \log n \prec (\log n)^2 \prec (\log n)^3 \prec \ldots \prec n \prec n^2 \prec n^3 \prec \ldots \prec 2^n \prec 3^n \prec 4^n \prec \ldots \prec n! \prec n^n$$

Bitte schaut euch die Infos auf der nächsten Folie an.

Infos zur Hierarchie

- Erinnerungen: $f \prec g$ heißt $f \in o(g)$ und $f \sim g$ heißt $f \in \Theta(g)$.
- Ich habe immer „log“ statt „$\log_b$“ für eine bestimmte Basis b geschrieben, weil alle Logarithmen, unabhängig von der Basis, gleich schnell wachsen, z.B.:

$$\log_2 n \sim \log_3 n \quad \text{und} \quad \log_2 \log_3 n \sim \log_4 \log_5 n$$

- Möchte man zwei Funktionen der Form $\frac{1}{\dots}$ miteinander vergleichen, so benutzt man die Regeln:

$$f(n) \prec g(n) \iff \tfrac{1}{g(n)} \prec \tfrac{1}{f(n)} \quad \text{und} \quad f(n) \sim g(n) \iff \tfrac{1}{f(n)} \sim \tfrac{1}{g(n)}$$

- Multipliziert man eine Funktion mit einer positiven Konstante, so wird sie dadurch weder schneller noch langsamer, z.B.:

$$\tfrac{1}{42} n^2 \sim n^2 \sim 42 n^2$$

Quizfrage

In welcher Beziehung stehen folgende Funktionen zueinander?

	$\ln n$	n	$2n$	$\ln \sqrt{n}$	$\sqrt{n}$	$\log_2 n$
$\ln n$						
n						
$2n$						
$\ln \sqrt{n}$						
$\sqrt{n}$						
$\log_2 n$						

Trage in die Zeile von $f(n)$ und Spalte von $g(n)$ ein o, ω bzw. Θ ein, falls $f \in o(g)$, $f \in \omega(g)$ bzw. $f \in \Theta(g)$ gilt.

Antwort

	$\ln n$	n	$2n$	$\ln \sqrt{n}$	$\sqrt{n}$	$\log_2 n$
$\ln n$	Θ	o	o	Θ	o	Θ
n	ω	Θ	Θ	ω	ω	ω
$2n$	ω	Θ	Θ	ω	ω	ω
$\ln \sqrt{n}$	Θ	o	o	Θ	o	Θ
$\sqrt{n}$	ω	o	o	ω	Θ	ω
$\log_2 n$	Θ	o	o	Θ	o	Θ

Quizfrage

In welcher Beziehung stehen folgende Funktionen zueinander?

	$n \ln n$	n^2	2^n	$n\sqrt{n}$	3^n	$5n^2$
$n \ln n$						
n^2						
2^n						
$n\sqrt{n}$						
3^n						
$5n^2$						

Trage in die Zeile von $f(n)$ und Spalte von $g(n)$ ein o, ω bzw. Θ ein, falls $f \in o(g)$, $f \in \omega(g)$ bzw. $f \in \Theta(g)$ gilt.

Antwort

	$n \ln n$	n^2	2^n	$n\sqrt{n}$	3^n	$5n^2$
$n \ln n$	Θ	o	o	o	o	o
n^2	ω	Θ	o	ω	o	Θ
2^n	ω	ω	Θ	ω	o	ω
$n\sqrt{n}$	ω	o	o	Θ	o	o
3^n	ω	ω	ω	ω	Θ	ω
$5n^2$	ω	Θ	o	ω	o	Θ

Die Stirling'sche Formel

Es gilt:

$$n! = \sqrt{2\pi n} \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot \left(1 + \frac{1}{12n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$$

Das heißt insbesondere:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{\sqrt{2\pi n} \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n} = 1$$

Info

Der Teil „$+\mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$“ bedeutet nichts anderes als „$+f(n)$“ mit f eine bestimmte Funktion aus $\mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Weil in diesem Thema viele Rechnungen mit Logarithmen, Potenzen und Wurzeln vorkommen, gibt es hier eine Auffrischung aller Rechenregeln aus der Schule :-)

Logarithmen, Potenzen, Wurzeln

Seien a, b, c beliebige reelle Zahlen mit $a \neq 0, b, c > 0, b, c \neq 1$. Dann sind folgende drei Aussagen zueinander äquivalent:

$$\log_c b = a \iff c^a = b \iff \sqrt[a]{b} = c$$

Beispiele

$$\begin{aligned}
\log_2 8 = 3 &\iff 2^3 = 8 &&\iff \sqrt[3]{8} = 2 \\
\log_3 \tfrac{1}{9} = -2 &\iff 3^{-2} = \tfrac{1}{9} &&\iff \sqrt[-2]{\tfrac{1}{9}} = 3 \\
\log_{\frac{1}{3}} 81 = -4 &\iff \left(\tfrac{1}{3}\right)^{-4} = 81 &&\iff \sqrt[-4]{81} = \tfrac{1}{3} \\
\log_{\frac{1}{4}} \tfrac{1}{16} = 2 &\iff \left(\tfrac{1}{4}\right)^{2} = \tfrac{1}{16} &&\iff \sqrt[2]{\tfrac{1}{16}} = \tfrac{1}{4}
\end{aligned}$$

Info

Für Logarithmen gibt es folgende spezielle Basen:

$$\lg n = \log_{10} n, \qquad \ln n = \log_e n, \qquad \operatorname{ld} n = \log_2 n.$$

In der Schule wird $\log n$ als $\log_{10} n$ definiert. In der Uni kann $\log n$ entweder $\ln n$ bedeuten oder $\log_b n$ für irgendein b, was nicht relevant ist.

Logarithmusregeln

Für Logarithmen gibt es folgende Rechenregeln:

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$
$$\log_a(n \cdot m) = \log_a n + \log_a m$$
$$\log_a \frac{n}{m} = \log_a n - \log_a m$$
$$\log_a n^m = m \cdot \log_a n$$
$$\log_{a^b} n = \frac{1}{b} \cdot \log_a n$$

Mit folgenden Spezialfällen:

$$\log_a 1 = 0, \quad \log_a a = 1, \quad \log_a a^n = n, \quad \log_a \sqrt[n]{a} = \tfrac{1}{n}.$$

Potenzregeln

Für Potenzen gibt es folgende Rechenregeln:

$$
\begin{aligned}
a^n \cdot a^m &= a^{n+m} \\
\frac{a^n}{a^m} &= a^{n-m} \\
(a^n)^m &= a^{n \cdot m} \\
a^{-n} &= \frac{1}{a^n} \\
a^n \cdot b^n &= (a \cdot b)^n \\
\frac{a^n}{b^n} &= \left(\frac{a}{b}\right)^n \\
a^{\frac{n}{m}} &= \sqrt[m]{a^n}
\end{aligned}
$$

Mit folgenden Spezialfällen:

$$a^0 = 1, \quad a^1 = a, \quad 0^n = 0, \quad 1^n = 1, \quad a^{\log_a n} = n.$$

Wurzelregeln

Für Wurzeln gibt es folgende Rechenregeln:

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$$

$$\sqrt[-n]{a} = \frac{1}{\sqrt[n]{a}}$$

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$$

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

Mit den Spezialfällen:

$$\sqrt[1]{a} = a \quad \sqrt[n]{1} = 1 \quad \sqrt[n]{0} = 0 \quad \sqrt[n]{a^n} = a.$$

Info

Wurzelregeln sind eigentlich völlig nutzlos. Am besten ist es, wenn man Wurzeln $\sqrt[n]{a}$ als Potenzen $a^{\frac{1}{n}}$ schreibt und mit den Potenzregeln rechnet ;-)

z.B.:

$$(\mathrm{ld}\, n)^2 < n \iff \mathrm{ld}\, n < n^{1/2} \ .$$

Quizfragen

Wieso gelten für beliebige positive reelle Zahlen b, n, m mit $b \neq 1$ folgende Gleichungen?

1. $n^{\log_b m} = m^{\log_b n}$
2. $\log_b(n+m) = \log_b n + \log_b\left(1 + \frac{m}{n}\right)$

Antworten

1.

$$
\begin{aligned}
& n^{\log_b m} = m^{\log_b n} \\
\iff & \log_b \left(n^{\log_b m} \right) = \log_b \left(m^{\log_b n} \right) \\
\iff & (\log_b m) \cdot (\log_b n) = (\log_b n) \cdot (\log_b m)
\end{aligned}
$$

□

2.

$$
\log_b(n+m) = \log_b \left(n \cdot \left(1 + \frac{m}{n} \right) \right) = \log_b n + \log_b \left(1 + \frac{m}{n} \right)
$$

□

Themenübersicht

Themenübersicht

Fakultät

Für die Fakultät $n!$ einer natürlichen Zahl $n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot \ldots \cdot 1$$

mit $0! := 1$.

Beispiele

Die ersten Werte für $n!$ sind:

$$0! = 1$$
$$1! = 1$$
$$2! = 2 \cdot 1 = 2$$
$$3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$$
$$4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$$
$$5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$$
$$6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$$
$$7! = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5040$$

Steigende und fallende Faktorielle

Für beliebige $n, k \in \mathbb{Z}$ gilt:

$$n^{\underline{k}} = \prod_{i=0}^{k-1} (n-i) = \underbrace{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}_{k \text{ Faktoren}} \qquad \text{(fallende Faktorielle)}$$

$$n^{\overline{k}} = \prod_{i=0}^{k-1} (n+i) = \underbrace{n \cdot (n+1) \cdot (n+2) \cdot \ldots \cdot (n+k-1)}_{k \text{ Faktoren}} \qquad \text{(steigende Faktorielle)}$$

mit $n^{\underline{0}} := 1$ und $n^{\overline{0}} := 1$.

Beispiele

Es gilt:

$$6^{\underline{4}} = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360, \qquad 6^{\overline{4}} = 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 = 3024,$$

$$2^{\underline{6}} = 2 \cdot 1 \cdot 0 \cdot (-1) \cdot (-2) \cdot (-3) = 0, \qquad 2^{\overline{6}} = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 5040,$$

$$(-3)^{\underline{5}} = (-3) \cdot (-4) \cdot (-5) \cdot (-6) \cdot (-7) = -2520, \qquad (-3)^{\overline{5}} = (-3) \cdot (-2) \cdot (-1) \cdot 0 \cdot 1 = 0\,.$$

Binomialkoeffizient

$\binom{n}{k}$ gibt für $n, k \in \mathbb{N}_0$ die Anzahl der k-elementigen Teilmengen einer n-elementigen Menge an.

Intuition

$\binom{n}{k}$ gibt die Anzahl der Möglichkeiten an, k Objekte aus einer Menge von n verschiedenen Objekten auszuwählen ohne Zurücklegen und ohne Beachtung der Reihenfolge. Wie beim Lotto!

Beispiel

Es gibt genau 6 2-elementige Teilmengen von $[4]$:

$$\{1,2\}\ ,\ \{1,3\}\ ,\ \{1,4\}\ ,\ \{2,3\}\ ,\ \{2,4\}\ ,\ \{3,4\}\ .$$

Es gilt: $\binom{4}{2} = 6$.

Noch ein Beispiel

Es gibt genau 10 3-elementige Teilmengen von [5]:

$$\{1,2,3\},\{1,2,4\},\{1,2,5\},\{1,3,4\},\{1,3,5\},$$
$$\{1,4,5\},\{2,3,4\},\{2,3,5\},\{2,4,5\},\{3,4,5\}.$$

Also ist $\binom{5}{3} = 10$.

Ein letztes Beispiel (für Lotto-Spieler)

Es gibt genau 13 983 816 6-elementige Teilmengen von $[49]$.

Also ist $\binom{49}{6} = 13\,983\,816$.

Direkte Berechnung

Für $n, k \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$\binom{n}{k} = \frac{n^{\underline{k}}}{k!}.$$

Gilt außerdem $k \leq n$, dann kann man $n^{\underline{k}} = \frac{n!}{(n-k)!}$ setzen und man erhält:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}.$$

Intuition

Für die erste Ziehung gibt es n Möglichkeiten, für die zweite nur noch $n-1$, für die dritte $n-2$, etc. Weil die Reihenfolge der k gezogenen Elemente nicht relevant ist muss man durch die Anzahl der Permutationen aller k Elemente dividieren, also durch $k!$.

Beispiele (nochmal)

$$\binom{4}{2} = \frac{4^{\underline{2}}}{2!} = \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1} = 6,$$

$$\binom{5}{3} = \frac{5^{\underline{3}}}{3!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 10,$$

$$\binom{49}{6} = \frac{49^{\underline{6}}}{6!} = \frac{49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 13\,983\,816.$$

Quizfragen

1. Was ist $\binom{6}{2}$?
2. Was ist $\binom{7}{3}$?
3. Was ist $\binom{6}{3}$?
4. Was ist $\binom{8}{4}$?

Antworten

1. $\binom{6}{2} = \frac{6 \cdot 5}{2 \cdot 1} = 15$.
2. $\binom{7}{3} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 35$.
3. $\binom{6}{3} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 20$.
4. $\binom{8}{4} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 70$.

Multimengen

Multimengen sind eine Verallgemeinerung von Mengen, in denen Elemente öfter vorkommen dürfen. Die Reihenfolge der Elemente spielt dabei weiterhin keine Rolle.

Beispiel

Es gibt 15 verschiedene 4-elementige Multimengen über $M = [3]$:

$$\{\!|1,1,1,1|\!\}\ ,\ \{\!|1,1,1,2|\!\}\ ,\ \{\!|1,1,1,3|\!\}\ ,\ \{\!|1,1,2,2|\!\}\ ,\ \{\!|1,1,2,3|\!\}\ ,$$
$$\{\!|1,1,3,3|\!\}\ ,\ \{\!|1,2,2,2|\!\}\ ,\ \{\!|1,2,2,3|\!\}\ ,\ \{\!|1,2,3,3|\!\}\ ,\ \{\!|1,3,3,3|\!\}\ ,$$
$$\{\!|2,2,2,2|\!\}\ ,\ \{\!|2,2,2,3|\!\}\ ,\ \{\!|2,2,3,3|\!\}\ ,\ \{\!|2,3,3,3|\!\}\ ,\ \{\!|3,3,3,3|\!\}\ .$$

Info

Für Multimengen benutzt man meistens dieselbe Notation wie für Mengen. Manchmal wird auch „$\{\!|\ldots|\!\}$“ statt „$\{\ldots\}$“ benutzt, um sie von normalen Mengen zu unterscheiden.

Info

Man kann jede k-elementige Multimenge über einer n-elementigen Menge M (z.B. $M = [n]$) als Wort über dem Alphabet $\Sigma = \{\bullet, \circ\}$ mit genau k schwarzen und $n-1$ weißen Kugeln darstellen. Die weißen Kugeln teilen das Wort in n Bereichen auf. Die Anzahl an schwarzen Kugeln in jedem Bereich gibt die Anzahl an Vorkommnisse des entsprechenden Elements in der Multimenge an.

Jedem dieser Wörter kann genau eine der k-elementigen Teilmengen der Menge $[k+n-1]$ zugeordnet werden. Intuitiv gibt die jeweilige Teilmenge an, welche der $k+n-1$ Kugeln schwarz sind.

Beispiel

Wir betrachten folgende Multimenge mit $k = 7$ Elementen über $M = [n]$ mit $n = 4$:

$$\{\!|1, 1, 2, 3, 3, 3, 4|\!\} \ .$$

Diese Multimenge wird durch folgendes Wort der Länge $k + n - 1 = 10$ kodiert:

$$\bullet\bullet\circ\bullet\circ\bullet\bullet\bullet\circ\bullet \ .$$

Diesem Wort wird folgende 7-elementige Teilmenge von [10] zugeordnet:

$$\{1, 2, 4, 6, 7, 8, 10\}.$$

Info

Man kann also jeder k-elementigen Multimenge über $M = [n]$ genau einer der k-elementigen Teilmengen der Menge $[k + n - 1]$ zuordnen. Es folgt, dass es genau $\binom{k+n-1}{k}$ k-Multimengen einer n-elementigen Menge gibt.

Beispiel

Es gibt $\binom{2+3-1}{2} = \binom{4}{2} = 6$ verschiedene 2-Multimengen über $M = [3]$:

Multimenge über $M = [3]$	Kodierung als Wort	Teilmenge von $[2 + 3 - 1] = [4]$
$\{\!\{1, 1\}\!\}$	$\bullet\bullet\circ\circ$	$\{1, 2\}$
$\{\!\{1, 2\}\!\}$	$\bullet\circ\bullet\circ$	$\{1, 3\}$
$\{\!\{1, 3\}\!\}$	$\bullet\circ\circ\bullet$	$\{1, 4\}$
$\{\!\{2, 2\}\!\}$	$\circ\bullet\bullet\circ$	$\{2, 3\}$
$\{\!\{2, 3\}\!\}$	$\circ\bullet\circ\bullet$	$\{2, 4\}$
$\{\!\{3, 3\}\!\}$	$\circ\circ\bullet\bullet$	$\{3, 4\}$

Noch ein Beispiel

Es gibt $\binom{3+3-1}{3} = \binom{5}{3} = 10$ verschiedene 3-Multiteilmengen von $M = [3]$:

Multimenge über $M = [3]$	Kodierung als Wort	Teilmenge von $[3 + 3 - 1] = [5]$
$\{\!\{1, 1, 1\}\!\}$	●●●○○	$\{1, 2, 3\}$
$\{\!\{1, 1, 2\}\!\}$	●●○●○	$\{1, 2, 4\}$
$\{\!\{1, 1, 3\}\!\}$	●●○○●	$\{1, 2, 5\}$
$\{\!\{1, 2, 2\}\!\}$	●○●●○	$\{1, 3, 4\}$
$\{\!\{1, 2, 3\}\!\}$	●○●○●	$\{1, 3, 5\}$
$\{\!\{1, 3, 3\}\!\}$	●○○●●	$\{1, 4, 5\}$
$\{\!\{2, 2, 2\}\!\}$	○●●●○	$\{2, 3, 4\}$
$\{\!\{2, 2, 3\}\!\}$	○●●○●	$\{2, 3, 5\}$
$\{\!\{2, 3, 3\}\!\}$	○●○●●	$\{2, 4, 5\}$
$\{\!\{3, 3, 3\}\!\}$	○○●●●	$\{3, 4, 5\}$

Quizfrage

Sei $\Sigma = \{a, b, c, \ldots, z\}$ ein Alphabet mit $|\Sigma| = 26$. Wie viele Wörter $w \in \Sigma^*$ mit Länge $|w| = 3$ gibt es, so dass die Zeichen in w von links nach rechts gelesen in alphabetischer Reihenfolge vorkommen, d.h. zuerst alle as, dann alle bs, etc. ?

Antwort

Jedes dieser Wörter kann eindeutig durch eine 3-elementige Multimenge über Σ dargestellt werden. Da die Reihenfolge sich automatisch aus den Elementen selber ergibt muss man sie nicht berücksichtigen. Es gibt also

$$\binom{3+26-1}{3} = \binom{28}{3} = \frac{28 \cdot 27 \cdot 26}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 3276$$

solche Wörter.

Ziehen von Elementen

Wir ziehen k Elemente aus einer n-elementigen Menge. Dabei kann die Reihenfolge der Ziehungen eine Rolle spielen („geordnet“) oder nicht („ungeordnet“) und die gezogenen Elemente können wieder zurückgelegt werden oder nicht.

	mit Zurücklegen	ohne Zurücklegen
geordnet	n^k	$n^{\underline{k}}$
ungeordnet	$\binom{k+n-1}{k}$	$\binom{n}{k}$

Beispiel

Wir ziehen 2 Elemente aus der Menge $M = [3]$, d.h. es gilt $k = 2$ und $n = 3$. Für die Anzahl an Möglichkeiten gilt:

	mit Zurücklegen	ohne Zurücklegen
geordnet	$3^2 = 9$	$3^{\underline{2}} = 3 \cdot 2 = 6$
ungeordnet	$\binom{2+3-1}{2} = \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1} = 6$	$\binom{3}{2} = \frac{3 \cdot 2}{2 \cdot 1} = 3$

Dies entspricht folgenden Ergebnissen:

	mit Zurücklegen	ohne Zurücklegen
geordnet	$(1,2),(1,3),(2,1),$ $(2,3),(3,1),(3,2),$ $(1,1),(2,2),(3,3).$	$(1,2),(1,3),(2,1),$ $(2,3),(3,1),(3,2).$
ungeordnet	$\{\!\{1,2\}\!\},\{\!\{1,3\}\!\},\{\!\{2,3\}\!\},$ $\{\!\{1,1\}\!\},\{\!\{2,2\}\!\},\{\!\{3,3\}\!\}.$	$\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\}.$

Themenübersicht

Produktregel

Die Kardinalität des kartesischen Produkts endlicher Mengen entspricht genau dem Produkt der einzelnen Kardinalitäten:

$$|A_1 \times \ldots \times A_n| = |A_1| \cdot \ldots \cdot |A_n|$$

Intuition

Sind wir an der Anzahl an Ausgängen eines mehrstufigen Experiments interessiert, dann multipliziert man die Anzahl an möglichen Ausgängen aller einzelnen Stufen.

- Zuerst: ... ($|A_1|$ Möglichkeiten)
- Dann: ... ($|A_2|$ Möglichkeiten)
- ...
- Dann: ... ($|A_n|$ Möglichkeiten)

Insgesamt hat man $|A_1| \cdot |A_2| \cdot \ldots \cdot |A_n|$ Möglichkeiten.

Quizfragen

Wie viele verschiedene Anagramme besitzen folgende Wörter?

1. TITISEE,
2. PFEFFER,
3. KOKOMO,
4. CARACAS,
5. OUAGADOUGOU.

Info: Ein Anagramm ist ein Wort, das aus einem anderen Wort durch Umstellung der einzelnen Buchstaben gebildet wurde. Beispielsweise ist SPORT ein Anagramm von PROST.

Antworten

Für jeden Buchstaben wählen wir sukzessiv die Teilmenge der freien Positionen im Wort, an dem der Buchstabe stehen soll. Mit der Produktregel erhalten wir:

1. $\binom{7}{2} \cdot \binom{5}{2} \cdot \binom{3}{2} \cdot \binom{1}{1} = \frac{7!}{2!\cancel{5!}} \cdot \frac{\cancel{5!}}{2!\cancel{3!}} \cdot \frac{\cancel{3!}}{2!\cancel{1!}} \cdot \frac{\cancel{1!}}{1!\cdot 0!} = \frac{7!}{2!\cdot 2!\cdot 2!\cdot 1!} = 630.$
2. $\binom{7}{3} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{2}{1} \cdot \binom{1}{1} = \frac{7!}{3!\cancel{4!}} \cdot \frac{\cancel{4!}}{2!\cancel{2!}} \cdot \frac{\cancel{2!}}{2!\cancel{1!}} \cdot \frac{\cancel{1!}}{1!\cdot 0!} = \frac{7!}{3!\cdot 2!\cdot 1!\cdot 1!} = 420.$
3. $\binom{6}{3} \cdot \binom{3}{2} \cdot \binom{1}{1} = \frac{\cancel{6!}}{3!\cancel{3!}} \cdot \frac{\cancel{3!}}{2!\cancel{1!}} \cdot \frac{\cancel{1!}}{1!\cdot 0!} = \frac{6!}{3!\cdot 2!\cdot 1!} = 60.$
4. $\binom{7}{3} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{2}{1} \cdot \binom{1}{1} = \frac{7!}{3!\cancel{4!}} \cdot \frac{\cancel{4!}}{2!\cancel{2!}} \cdot \frac{\cancel{2!}}{2!\cancel{1!}} \cdot \frac{\cancel{1!}}{1!\cdot 0!} = \frac{7!}{3!\cdot 2!\cdot 1!\cdot 1!} = 420.$
5. $\binom{11}{3} \cdot \binom{8}{3} \cdot \binom{5}{2} \cdot \binom{3}{2} \cdot \binom{1}{1} = \frac{11!}{3!\cancel{8!}} \cdot \frac{\cancel{8!}}{3!\cancel{5!}} \cdot \frac{\cancel{5!}}{2!\cancel{3!}} \cdot \frac{\cancel{3!}}{2!\cancel{1!}} \cdot \frac{\cancel{1!}}{1!\cdot 0!} = \frac{11!}{3!\cdot 3!\cdot 2!\cdot 2!\cdot 1!} = 277200.$

Summenregel

Die Kardinalität einer disjunkten Vereinigung („$\uplus$“) endlicher Mengen entspricht genau der Summe der einzelnen Kardinalitäten:

$$|A_1 \uplus \ldots \uplus A_n| = |A_1| + \ldots + |A_n|$$

Intuition

Hat man mehrere mögliche Teilexperimente (die sich nicht überschneiden) zur Wahl, dann addiert man die Anzahl an möglichen Ausgängen aller einzelnen Teilexperimente.

- Entweder: ... ($|A_1|$ Möglichkeiten)
- oder: ... ($|A_2|$ Möglichkeiten)
- ...
- oder: ... ($|A_n|$ Möglichkeiten)

Insgesamt hat man $|A_1| + |A_2| + \ldots + |A_n|$ Möglichkeiten.

Gleichheitsregel

Existiert eine bijektive Funktion $f : A \to B$, dann haben die Mengen A und B gleich viele Elemente.

Doppeltes Abzählen

In jeder Matrix (Tabelle) ist die Summe der Zeilensummen gleich der Summe der Spaltensummen.

Beispiel

In einem Tanzkurs gibt es 24 Damen und n Herren. Nach der Tanzstunde hat jede Dame mit genau 8 Herren getanzt, jeder Herr mit genau 6 Damen.

Wie viele Herren waren anwesend?

Modellierung als Tabelle:

	d_1	d_2	$\cdots$	d_{24}
h_1	?	?	$\cdots$	?
h_2	?	?	$\cdots$	?
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
h_n	?	?	$\cdots$	?

Die Einträge „?“ in der Tabelle sind 1, fall das Paar miteinander getanzt hat und 0 sonst. Wir wissen:

- In jeder der n Zeilen gibt es genau 6 1en
- In jeder der 24 Spalten gibt es genau 8 1en

D.h.:

$$6 \cdot n = 24 \cdot 8 \ .$$

Daraus folgt:

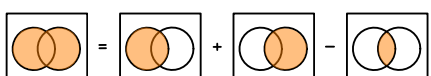
$$n = \frac{24 \cdot 8}{6} = 32 \ .$$

Inklusion und Exklusion bzw. Siebformel (für $n = 2$)

Für beliebige (nicht notwendigerweise disjunkte) Mengen A und B gilt:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| \ .$$

Graphisch:

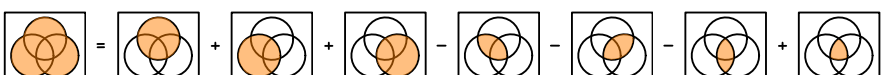


Inklusion und Exklusion bzw. Siebformel (für $n = 3$)

Für beliebige (nicht notwendigerweise disjunkte) Mengen A, B, C gilt:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| \ .$$

Graphisch:



Inklusion und Exklusion bzw. Siebformel (für ein allgemeines n)

Für beliebige (nicht notwendigerweise disjunkte) endliche Mengen $A_1, \ldots, A_n$ gilt:

$$\Big| \bigcup_{i \in [n]} A_i \Big| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} \cdot \sum_{\substack{I \subseteq [n], \\ |I|=j}} \Big| \bigcap_{i \in I} A_i \Big|$$

Der Ausdruck „$(-1)^{j-1}$“ ist für den Vorzeichenwechsel („+“, „−“, „+“, „−“, …) zuständig und die innere Summe „$\sum_{I \subseteq [n], |I|=j} |\bigcap_{i \in I} A_i|$“ summiert über alle möglichen j-elementigen Teilmengen von $\{A_1, \ldots, A_n\}$.

Beispiel

Beispielsweise ergibt sich für $n = 2$:

$$
\begin{aligned}
|A_1 \cup A_2| &= \sum_{j=1}^{2} (-1)^{j-1} \cdot \sum_{\substack{I \subseteq [2], \\ |I|=j}} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right| \\
&= \underbrace{(-1)^0 \cdot (|A_1| + |A_2|)}_{j=1} \\
&\quad + \underbrace{(-1)^1 \cdot |A_1 \cap A_2|}_{j=2} \\
&= |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|
\end{aligned}
$$

Noch ein Beispiel

Für $n = 3$ ergibt sich:

$$
\begin{aligned}
|A_1 \cup A_2 \cup A_3| &= \sum_{j=1}^{3} (-1)^{j-1} \cdot \sum_{\substack{I \subseteq [3], \\ |I|=j}} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right| \\
&= \underbrace{(-1)^0 \cdot (|A_1| + |A_2| + |A_3|)}_{j=1} \\
&+ \underbrace{(-1)^1 \cdot (|A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_2 \cap A_3|)}_{j=2} \\
&+ \underbrace{(-1)^2 \cdot |A_1 \cap A_2 \cap A_3|}_{j=3} \\
&= |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|
\end{aligned}
$$

Spezialfall

Falls die Kardinalität einer Schnittmenge von j Mengen nur von der Anzahl j an beteiligten Mengen und nicht von den Mengen selbst abhängig ist, dann gilt:

$$\Big|\bigcup_{i\in[n]} A_i\Big| = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}\cdot \sum_{\substack{I\subseteq[n],\\ |I|=j}} \Big|\bigcap_{i\in I} A_i\Big|$$

$$= \sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}\cdot \binom{n}{j}\cdot \Big|\bigcap_{i\in[j]} A_i\Big|$$

Die Anzahl an Summanden in der inneren Summe entspricht genau der Anzahl an j-elementigen Teilmengen von $[n]$, d.h. genau $\binom{n}{j}$.

Sind alle Summanden gleich (also die Schnittmengen von j Mengen alle gleich groß), dann kann man $\binom{n}{j}$ mal einen beliebigen Summanden nehmen, z.B. $|\bigcap_{i\in[j]} A_i| = |A_1 \cap \ldots \cap A_j|$.

Beispiel

Ein Kellner muss 5 verschiedene Bestellungen an 5 verschiedenen Tischen bringen. Leider weiß er nicht mehr wer was bestellt hat und muss raten. Bei wie vielen der insgesamt $5! = 120$ Verteilungsmöglichkeiten (Permutationen) bekommt keiner der 5 Gäste sein bestelltes Essen?

Wir definieren A_i für $i = 1, \ldots, 5$ als diejenige Menge, die alle Verteilungsmöglichkeiten, bei denen Gast i sein bestelltes Essen bekommt, enthält. $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5$ enthält somit alle Verteilungen bei denen mindestens ein Gast sein bestelltes Essen bekommt. Es folgt mit

$$\begin{aligned}
|A_1| &= 4! \,, \\
|A_1 \cap A_2| &= 3! \,, \\
|A_1 \cap A_2 \cap A_3| &= 2! \,, \\
|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| &= 1! \,, \\
|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5| &= 0! :
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5| &= \binom{5}{1} \cdot 4! - \binom{5}{2} \cdot 3! + \binom{5}{3} \cdot 2! - \binom{5}{4} \cdot 1! + \binom{5}{5} \cdot 0! \\
&= 5 \cdot 24 - 10 \cdot 6 + 10 \cdot 2 - 5 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 76.
\end{aligned}$$

D.h. er kriegt bei $120 - 76 = 44$ Verteilungsmöglichkeiten von allen 5 Gästen Ärger.

Achtung!

In dem Beispiel durfte man den Spezialfall der Siebformel verwenden, weil die Kardinalität jeder Schnittmenge nur von der Anzahl der beteiligten Mengen und nicht von den Mengen selbst abhängig ist, d.h.:

$$
\begin{aligned}
&|A_1| = \ldots = |A_5| = 4! \ , \\
&|A_1 \cap A_2| = \ldots = |A_4 \cap A_5| = 3! \ , \\
&|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = \ldots = |A_3 \cap A_4 \cap A_5| = 2! \ , \\
&|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| = \ldots = |A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5| = 1! \ .
\end{aligned}
$$

Quizfrage

Gegeben seien ein Alphabet $\Sigma = \{a, b, c, d\}$, eine Wörtermenge $\Omega = \{w \in \Sigma^* \mid |w| = 6\}$ und folgende Mengen $A, B, C, D \subseteq \Omega$:

$$A = \{w \in \Omega \mid \text{in } w \text{ kommt kein } a \text{ vor}\} \ , \qquad B = \{w \in \Omega \mid \text{in } w \text{ kommt kein } b \text{ vor}\} \ ,$$
$$C = \{w \in \Omega \mid \text{in } w \text{ kommt kein } c \text{ vor}\} \ , \qquad D = \{w \in \Omega \mid \text{in } w \text{ kommt kein } d \text{ vor}\} \ .$$

Wie viele Wörter $w \in \Omega$ gibt es, die jedes der Zeichen aus Σ mindestens einmal enthalten?

Hinweise:

- Betrachte die Menge $A \cup B \cup C \cup D$.
- Beachte, dass für $k = 1, 2, 3, 4$ die Kardinalität der Schnittmenge von k der Mengen A, B, C, D nur von k und nicht von den Mengen selbst abhängig ist.

Antwort

Für die Kardinalität von $A \cup B \cup C \cup D$ gilt nach dem Spezialfall der Siebformel für $n = 4$:

$$\begin{aligned}
|A \cup B \cup C \cup D| &= \binom{4}{1}|A| - \binom{4}{2}|A \cap B| + \binom{4}{3}|A \cap B \cap C| - \binom{4}{4}|A \cap B \cap C \cap D| \\
&= 4|A| - 6|A \cap B| + 4|A \cap B \cap C| - |A \cap B \cap C \cap D| \\
&= 4 \cdot 3^6 - 6 \cdot 2^6 + 4 \cdot 1^6 - 0^6 \\
&= 4 \cdot 729 - 6 \cdot 64 + 4 \\
&= 2916 - 384 + 4 \\
&= 2536
\end{aligned}$$

Die gesuchte Anzahl an Wörtern beträgt dann:

$$|\Omega| - |A \cup B \cup C \cup D| = 4^6 - 2536 = 4096 - 2536 = 1560 \ .$$

Schubfachprinzip

Sei $f : X \to Y$ mit $0 < |Y| < |X| < \infty$. Dann gilt:

$$\exists y \in Y : |f^{-1}(y)| \geq 2$$

Intuition

X sind Objekte und Y Schubfächer für die Objekte. Hat man mehr Objekte als Schubfächer, dann existiert bei jeder Verteilung von Objekten auf Schubfächer immer mindestens ein Schubfach mit mindestens 2 Objekten.

Verallgemeinertes Schubfachprinzip

Sei $f : X \to Y$ mit $0 < |Y|, |X| < \infty$. Dann gilt:

$$\exists y \in Y : |f^{-1}(y)| \geq \left\lceil \frac{|X|}{|Y|} \right\rceil$$

Intuition

Wieder sind X Objekte und Y Schubfächer für die Objekte. Verteilt man alle Objekte auf die Schubfächer, dann hat man mindestens ein Schubfach mit mindestens $\left\lceil \frac{|X|}{|Y|} \right\rceil$ Objekten.

Themenübersicht

Themenübersicht

Zählkoeffizienten

Wir betrachten in DS insgesamt 7 verschiedene Zählkoeffizienten:

1. Binomialkoeffizient $\binom{n}{k}$ (extrem wichtig)
2. Stirling-Zahlen erster Art $s_{n,k}$ bzw. $\left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix}\right]$ (weniger wichtig)
3. Stirling-Zahlen zweiter Art $S_{n,k}$ bzw. $\left\{\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix}\right\}$ (sehr wichtig)
4. Zahlpartitionen $P_{n,k}$ (weniger wichtig)
5. Ramsey-Zahlen $R(n,k)$ (kaum wichtig)
6. Rencontres-Zahlen $d(n,k)$ (kaum wichtig)
7. Kronecker-Delta $\delta_{n,k}$ (kaum wichtig)

Binomialkoeffizient (nochmal)

$\binom{n}{k}$ gibt für $n, k \in \mathbb{N}_0$ die Anzahl der k-elementigen Teilmengen einer n-elementigen Menge an. Für $n, k \in \mathbb{N}_0$ gilt:

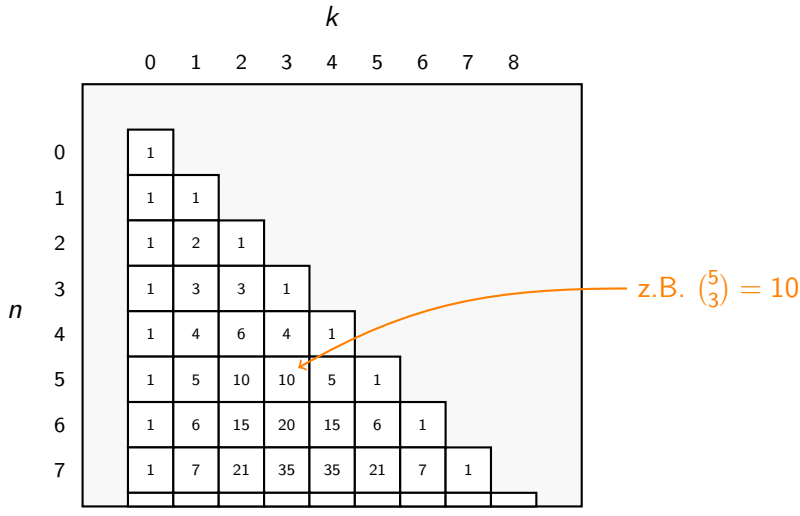
$$\binom{n}{k} = \frac{n^{\underline{k}}}{k!} \ .$$

Gilt außerdem $k \leq n$, dann kann man $n^{\underline{k}} = \frac{n!}{(n-k)!}$ setzen und man erhält:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} \ .$$

Info

Die Werte von $\binom{n}{k}$ können im Pascalschen Dreieck abgelesen werden.



Rekursive Berechnung

Der Binomialkoeffizient $\binom{n}{k}$ genügt für alle $n, k \in \mathbb{N}$ mit $k \leq n$ die Rekursion

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

mit $\binom{0}{0} = 1$, $\binom{n}{0} = 1$ und $\binom{n}{n} = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Diese Formel heißt auch Pascalsche Identität.

Intuition

Wenn man k Zahlen aus $[n]$ zieht wird die Zahl n entweder gezogen oder nicht gezogen (deswegen „+“).

- Falls n gezogen wird, so muss man aus den restlichen $n-1$ Zahlen nur noch $k-1$ ziehen. Dafür gibt es $\binom{n-1}{k-1}$ Möglichkeiten.
- Falls n nicht gezogen wird, so muss man aus den restlichen $n-1$ Zahlen alle k ziehen. Dafür gibt es $\binom{n-1}{k}$ Möglichkeiten.

Binomische Formel

Für $n \in \mathbb{N}_0$ beliebige a und b gilt:

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \cdot a^i \cdot b^{n-i} = (a+b)^n$$

Beispiele

Für die ersten Werte von n gilt:

$$
\begin{aligned}
1 &= (a+b)^0 \\
b+a &= (a+b)^1 \\
b^2+2ab+a^2 &= (a+b)^2 \\
b^3+3ab^2+3a^2b+a^3 &= (a+b)^3 \\
b^4+4ab^3+6a^2b^2+4a^3b+a^4 &= (a+b)^4 \\
b^5+5ab^4+10a^2b^3+10a^3b^2+5a^4b+a^5 &= (a+b)^5 \\
b^6+6ab^5+15a^2b^4+20a^3b^3+15a^4b^2+6a^5b+a^6 &= (a+b)^6
\end{aligned}
$$

Beispiel

Multipliziert man $(x+y+z)^6$ aus, so erhält man:

$$x^6+6x^5y+6x^5z+15x^4y^2+30x^4yz+15x^4z^2+20x^3y^3+60x^3y^2z+60x^3yz^2+20x^3z^3+15x^2y^4+60x^2y^3z+90x^2y^2z^2+60x^2yz^3+15x^2z^4+6xy^5+30xy^4z+60xy^3z^2+60xy^2z^3+30xyz^4+6xz^5+y^6+6y^5z+15y^4z^2+20y^3z^3+15y^2z^4+6yz^5+z^6.$$

Wir erkennen beispielsweise, dass 60 der Koeffizient von x^2yz^3 in $(x+y+z)^6$ ist.

Den Koeffizient von x^2yz^3 in $(x+y+z)^6$ kann man mit der Binomischen Formel sehr leicht berechnen:

- Für $a = x$, $b = y + z$ und $n = 6$ erhalten wir:

$$(x+y+z)^6 = (x+(y+z))^6 = \sum_{k=0}^{6} \binom{6}{k} x^k (y+z)^{6-k} = \ldots + \binom{6}{2} x^2 (y+z)^4 + \ldots$$

- Für $a = y$, $b = z$ und $n = 4$ erhalten wir:

$$(y+z)^4 = \sum_{k=0}^{4} \binom{4}{k} y^k z^{4-k} = \ldots + \binom{4}{1} yz^3 + \ldots$$

Somit erhält $(x+y+z)^6$ den Summanden $\binom{6}{2}x^2\binom{4}{1}yz^3 = \binom{6}{2}\binom{4}{1}x^2yz^3$ und der gesuchte Koeffizient ist $\binom{6}{2}\binom{4}{1} = 60$.

Quizfragen

1. Was ist der Koeffizient von $x^2y^2z^2$ in $(x+y+z)^6$?
2. Was ist der Koeffizient von xyz^4 in $(x+y+z)^6$?
3. Was ist der Koeffizient von xy^3z^2 in $(x+2y+z)^6$?
4. Was ist der Koeffizient von x^3yz^2 in $(3x+y+2z)^6$?
5. Was ist der Koeffizient von $x^2y^4z^2$ in $(xy+y+z)^6$?
6. Was ist der Koeffizient von $x^3y^5z^4$ in $(xyz+y+z)^6$?
7. Was ist der Koeffizient von $w^2x^3yz^2$ in $(w+x+y+z)^8$?

1. $(x+y+z)^6 = (x+(y+z))^6 = \sum_{k=0}^{6} \binom{6}{k} x^k (y+z)^{6-k} = \ldots + \binom{6}{2} x^2 (y+z)^4 + \ldots$
   $\rightsquigarrow (y+z)^4 = \sum_{k=0}^{4} \binom{4}{k} y^k z^{4-k} = \ldots + \binom{4}{2} y^2 z^2 + \ldots$
   $\rightsquigarrow$ Der Koeffizient ist $\binom{6}{2}\binom{4}{2} = 90$.
2. $(x+y+z)^6 = (x+(y+z))^6 = \sum_{k=0}^{6} \binom{6}{k} x^k (y+z)^{6-k} = \ldots + \binom{6}{1} x (y+z)^5 + \ldots$
   $\rightsquigarrow (y+z)^5 = \sum_{k=0}^{5} \binom{5}{k} y^k z^{5-k} = \ldots + \binom{5}{1} yz^4 + \ldots$
   $\rightsquigarrow$ Der Koeffizient ist $\binom{6}{1}\binom{5}{1} = 30$.
3. $(x+2y+z)^6 = (x+(2y+z))^6 = \sum_{k=0}^{6} \binom{6}{k} x^k (2y+z)^{6-k} = \ldots + \binom{6}{1} x (2y+z)^5 + \ldots$
   $\rightsquigarrow (2y+z)^5 = \sum_{k=0}^{5} \binom{5}{k} (2y)^k z^{4-k} = \ldots + \binom{5}{3} (2y)^3 z^2 + \ldots = \ldots + \binom{5}{3} 2^3 y^3 z^2 + \ldots$
   $\rightsquigarrow$ Der Koeffizient ist $\binom{6}{1}\binom{5}{3} 2^3 = 480$.
4. $(3x+y+2z)^6 = (3x+(y+2z))^6 = \sum_{k=0}^{6} \binom{6}{k} 3x^k (y+2z)^{6-k} =$
   $\ldots + \binom{6}{3} (3x)^3 (y+2z)^3 + \ldots = \ldots + \binom{6}{3} 3^3 x^3 (y+2z)^3 + \ldots$
   $\rightsquigarrow (y+2z)^3 = \sum_{k=0}^{3} \binom{3}{k} y^k (2z)^{3-k} = \ldots + \binom{3}{1} y (2z)^2 + \ldots = \ldots + \binom{3}{1} 2^2 yz^2 + \ldots$
   $\rightsquigarrow$ Der Koeffizient ist $\binom{6}{3} 3^3 \binom{3}{1} 2^2 = 6480$.

5. $(xy+y+z)^6 = (xy+(y+z))^6 = \sum_{k=0}^{6} \binom{6}{k}(xy)^k(y+z)^{6-k} =$
$\ldots + \binom{6}{2}(xy)^2(y+z)^4 + \ldots = \ldots + \binom{6}{2}x^2y^2(y+z)^4 + \ldots$
$\leadsto (y+z)^4 = \sum_{k=0}^{4} \binom{4}{k}y^k z^{4-k} = \ldots + \binom{4}{2}y^2z^2 + \ldots$
$\leadsto$ Der Koeffizient ist $\binom{6}{2}\binom{4}{2} = 90$.
6. $(xyz+y+z)^6 = (xyz+(y+z))^6 = \sum_{k=0}^{6} \binom{6}{k}(xyz)^k(y+z)^{6-k} =$
$\ldots + \binom{6}{3}(xyz)^3(y+z)^3 + \ldots = \ldots + \binom{6}{3}x^3y^3z^3(y+z)^3 + \ldots$
$\leadsto (y+z)^3 = \sum_{k=0}^{3} \binom{3}{k}y^k z^{3-k} = \ldots + \binom{3}{2}y^2z + \ldots$
$\leadsto$ Der Koeffizient ist $\binom{6}{3}\binom{3}{2} = 60$.
7. $(w+x+y+z)^8 = (w+(x+y+z))^8 = \sum_{k=0}^{8} \binom{8}{k}w^k(x+y+z)^{8-k} =$
$\ldots + \binom{8}{2}w^2(x+y+z)^6 + \ldots$
$\leadsto (x+y+z)^6 = (3x+(y+z))^6 = \sum_{k=0}^{6} \binom{6}{k}x^k(y+z)^{6-k} = \ldots + \binom{6}{3}x^3(y+z)^3 + \ldots$
$\leadsto (y+z)^3 = \sum_{k=0}^{3} \binom{3}{k}y^k z^{3-k} = \ldots + \binom{3}{1}yz^2 + \ldots$
$\leadsto$ Der Koeffizient ist $\binom{8}{2}\binom{6}{3}\binom{3}{1} = 1680$.

Rechenregeln für Binomialkoeffizienten

Folgende Rechenregeln sind sehr wichtig. Es gilt für $n, m, k \in \mathbb{N}_0$:

$$\binom{n}{k} = \frac{n^{\underline{k}}}{k!}\,, \qquad \text{(Erste direkte Berechnung)}$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}\,, \qquad k \leq n \qquad \text{(Zweite direkte Berechnung)}$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}\,, \qquad 1 \leq n, k \qquad \text{(Pascalsche Identität)}$$

$$\binom{n}{k} = \sum_{i=0}^{k} \binom{m}{i} \cdot \binom{n-m}{k-i}\,, \qquad m \leq n \qquad \text{(Vandermondsche Identität)}$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}\,, \qquad k \leq n \qquad \text{(Symmetrie-Eigenschaft)}$$

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \cdot a^i \cdot b^{n-i} = (a+b)^n \,, \qquad a, b \in \mathbb{R} \qquad \text{(Binomische Formel)}$$

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = 2^n \qquad \text{(Zeilensumme)}$$

$$\sum_{i=k}^{n} \binom{i}{k} = \binom{n+1}{k+1} \,, \qquad k \leq n \qquad \text{(Spaltensumme)}$$

$$\sum_{i=0}^{k} \binom{n+i}{i} = \binom{n+k+1}{k} \qquad \text{(Diagonalsumme)}$$

Diese Rechenregeln kann man sehr schön am Pascalschen Dreieck erkennen!

Themenübersicht

Zyklenschreibweise für Permutationen

Eine Permutation p ist eine bijektive Funktion $p\colon A \to A$ über eine endliche Menge A (s. Folie 333).

Permutationen kann man auch als eine Komposition von Zyklen darstellen. Es gilt:

$$p = \underbrace{(c_{1,1}, \ldots, c_{l_1,1})}_{\substack{\text{Zyklus 1}\\ \text{mit Länge } l_1}} \underbrace{(c_{1,2}, \ldots, c_{l_2,2})}_{\substack{\text{Zyklus 2}\\ \text{mit Länge } l_2}} \ldots \underbrace{(c_{1,k}, \ldots, c_{l_k,k})}_{\substack{\text{Zyklus } k\\ \text{mit Länge } l_k}},$$

wobei $A = \{c_{1,1}, \ldots, c_{l_1,1}, c_{1,2}, \ldots, c_{l_2,2}, \ldots, c_{1,k}, \ldots, c_{l_k,k}\}$ und für alle $c_{i,j}$ gilt:

$$p(c_{i,j}) = \begin{cases} c_{i+1,j}, & \text{falls } i < l_j \\ c_{1,j}, & \text{falls } i = l_j \end{cases}$$

Man versteht das aber viel viel besser mit einem Beispiel :-)

Beispiel

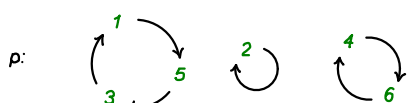
Sei p eine Permutation über [6] mit:

$$p(1) = 5,\ p(2) = 2,\ p(3) = 1,\ p(4) = 6,\ p(5) = 3,\ p(6) = 4.$$

Matrixschreibweise:

$$p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 2 & 1 & 6 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Graphisch:



Zyklenschreibweise:

$$p = (1, 5, 3)(2)(4, 6)$$

Noch ein Beispiel

Sei p eine Permutation über $[8]$ mit:

$$p(1) = 5,\ p(2) = 6,\ p(3) = 7,\ p(4) = 8,\ p(5) = 1,\ p(6) = 2,\ p(7) = 3,\ p(8) = 4.$$

Matrixschreibweise:

$$p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

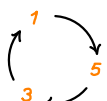
Graphisch:

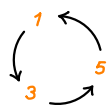
Zyklenschreibweise:

$$p = (1, 5)(2, 6)(3, 7)(4, 8)$$

Infos

- Es gibt in der Regel mehrere Möglichkeiten einen Zyklus aufzuschreiben. Zum Beispiel:
$$(1,8,2,5) = (8,2,5,1) = (2,5,1,8) = (5,1,8,2).$$
- Achtung: Man darf die Komponenten eines Zyklus beliebig „shiften“, aber man darf die Reihenfolge nicht beliebig ändern! Zum Beispiel:
$$\underbrace{(1,5,3) = (5,3,1) = (3,1,5)}_{\text{}} \neq \underbrace{(1,3,5) = (3,5,1) = (5,1,3)}_{\text{}}.$$





- Die Reihenfolge der Zyklen ist irrelevant. Zum Beispiel:
$$(1,6)(2)(4)(3,5) = (3,5)(4)(1,6)(2).$$

Quizfragen

1. Gilt $(3,1,4,5,2,6) = (4,5,2,6,3,1)$?
2. Gilt $(3,1,4,5,2,6) = (6,2,5,4,1,3)$?
3. Gilt $(3,4)(5,1,2,6) = (3,4)(1,2,6,5)$?
4. Gilt $(3,4)(5,1,2,6) = (1,2,6,5)(3,4)$?
5. Gilt $(2,4,3)(5,1,6) = (4,2,3)(1,5,6)$?
6. Gilt $(2,4)(1,5)(3,6) = (4,2)(1,5)(6,3)$?
7. Gilt $(2,4)(1,5)(3,6) = (5,1)(4,2)(6,3)$?
8. Gilt $(1)(4,2)(3,6,5) = (1)(2,4)(5,3,6)$?
9. Gilt $(1)(4,2)(3,6,5) = (6,5,3)(1)(4,2)$?

Antworten

1. Ja.
2. Nein.
3. Ja.
4. Ja.
5. Nein.
6. Ja.
7. Ja.
8. Ja.
9. Ja.

Quizfragen

Gegeben seien folgende Permutationen p_1, p_2 und p_3 über $[6]$ in Matrixdarstellung:

1. $p_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 6 & 1 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$,
2. $p_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 1 & 5 & 6 & 4 \end{pmatrix}$,
3. $p_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 5 & 1 & 6 & 4 \end{pmatrix}$.

Wie sehen p_1, p_2 und p_3 in Zyklendarstellung aus?

Antworten

1. $p_1 = (1, 2, 6, 3)(4, 5)$.
2. $p_2 = (1, 3)(2)(4, 5, 6)$.
3. $p_3 = (1, 2, 3, 5, 6, 4)$.

Quizfragen

Gegeben seien folgende Permutationen p_1, p_2 und p_3 über $[6]$ in Zyklendarstellung:

1. $p_1 = (2,3)(4)(1,5,6)$,
2. $p_2 = (1,3,2)(6,4,5)$,
3. $p_3 = (5,3,6,2)(4,1)$.

Wie sehen p_1, p_2 und p_3 in Matrixdarstellung aus?

Antworten

1. $p_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 3 & 2 & 4 & 6 & 1 \end{pmatrix}$.
2. $p_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 6 & 4 \end{pmatrix}$.
3. $p_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

Stirling-Zahlen erster Art

$s_{n,k}$ gibt die Anzahl der Permutationen in Zyklenschreibweise (s. Folie 333) von n Elementen mit genau k (nichtleeren) Zyklen an. Man schreibt oft auch $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ statt $s_{n,k}$.

Beispiel

Es gibt genau 11 Permutationen über [4] mit genau 2 Zyklen:

$$(1)(2,3,4)\ ,\ (1)(2,4,3)\ ,\ (2)(1,3,4)\ ,\ (2)(1,4,3)\ ,$$
$$(3)(1,2,4)\ ,\ (3)(1,4,2)\ ,\ (4)(1,2,3)\ ,\ (4)(1,3,2)\ ,$$
$$(1,2)(3,4)\ ,\ (1,3)(2,4)\ ,\ (1,4)(2,3)\ .$$

Also ist $s_{4,2} = 11$.

Erinnerung

Man kann die Elemente innerhalb eines Zykels beliebig „shiften“, z.B.:

$$(1,2,3) = (2,3,1) = (3,1,2) \neq (1,3,2) = (2,1,3) = (3,2,1)$$

Quizfragen

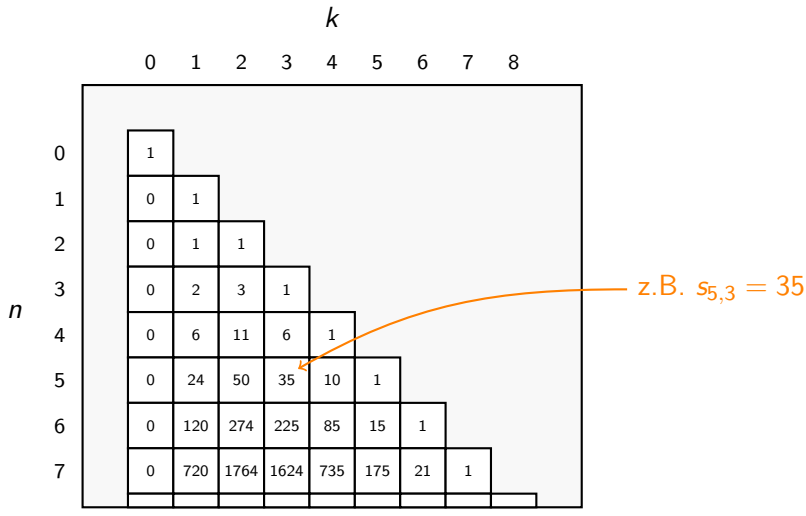
1. Was ist $s_{3,1}$?
2. Was ist $s_{3,2}$?
3. Was ist $s_{4,1}$?
4. Was ist $s_{4,3}$?
5. Was ist $s_{n,0}$ für $n \in \mathbb{N}$?
6. Was ist $s_{n,1}$ für $n \in \mathbb{N}$?
7. Was ist $s_{n,n-1}$ für $n \in \mathbb{N}$?
8. Was ist $s_{n,n}$ für $n \in \mathbb{N}_0$?

Antworten

1. $s_{3,1} = 2$.
2. $s_{3,2} = 3$.
3. $s_{4,1} = 6$.
4. $s_{4,3} = 6$.
5. $s_{n,0} = 0$.
6. $s_{n,1} = \frac{n!}{n} = (n-1)!$.
7. $s_{n,n-1} = \binom{n}{2}$.
8. $s_{n,n} = 1$.

Info

Die Werte von $s_{n,k}$ können in folgendem Dreieck abgelesen werden.



Rekursive Berechnung

Die Stirling-Zahl erster Art $s_{n,k}$ genügt für alle $n, k \in \mathbb{N}$ mit $k \leq n$ die Rekursion

$$s_{n,k} = s_{n-1,k-1} + (n-1) \cdot s_{n-1,k}$$

mit $s_{0,0} = 1$, $s_{n,0} = 0$ und $s_{n,n} = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Intuition

Wenn man k Zyklen mit Zahlen aus $[n]$ füllen möchte, dann kann das Element n entweder alleine in einem Zyklus sein oder nicht (deswegen „$+$“).

- Falls n alleine in einem Zyklus ist, so hat man für die restlichen $n-1$ Elemente nur noch $k-1$ Zyklen. Daher gibt es hierfür $s_{n-1,k-1}$ Möglichkeiten.
- Falls n nicht alleine in einem Zyklus ist, so muss man die restlichen $n-1$ Elemente in allen k Zyklen verteilen ($s_{n-1,k}$ Möglichkeiten) und dann (deswegen jetzt „$\cdot$“) das Element n rechts von einem der $n-1$ restlichen Elemente in dem entsprechenden Zyklus hinzufügen ($n-1$ Möglichkeiten). Insgesamt gibt es hierfür $(n-1) \cdot s_{n-1,k}$ Möglichkeiten.

Rechenregeln für Stirlingzahlen erster Art

Folgende Rechenregeln sind für Stirlingzahlen erster Art wichtig. Es gilt für $n, k \in \mathbb{N}_0$:

$$s_{n,k} = s_{n-1,k-1} + (n-1) \cdot s_{n-1,k} \ , \qquad 1 \leq n, k \qquad \text{(Rekursive Berechnung)}$$

$$\sum_{i=0}^{n} s_{n,i} = n! \qquad \text{(Zeilensumme)}$$

$$s_{n,0} = 0 \ , \qquad 1 \leq n$$

$$s_{n,1} = (n-1)! \ , \qquad 1 \leq n$$

$$s_{n,n-1} = \binom{n}{2} = \frac{n \cdot (n-1)}{2} \ , \qquad 1 \leq n$$

$$s_{n,n} = 1$$

Diese Rechenregeln kann man sehr schön am Dreieck für Stirlingzahlen erster Art erkennen!

Themenübersicht

Stirling-Zahlen zweiter Art

$S_{n,k}$ gibt die Anzahl der Partitionen (s. Folie 43) einer n-elementigen Menge in k nichtleere Klassen an. Man schreibt oft auch $\left\{ {n \atop k} \right\}$ statt $S_{n,k}$.

Beispiel

Es gibt genau 7 2-Partitionen der Menge [4]:

$$\{\{1\},\{2,3,4\}\}\ ,\ \{\{2\},\{1,3,4\}\}\ ,\ \{\{3\},\{1,2,4\}\}\ ,\ \{\{4\},\{1,2,3\}\}\ ,$$
$$\{\{1,2\},\{3,4\}\}\ ,\ \{\{1,3\},\{2,4\}\}\ ,\ \{\{1,4\},\{2,3\}\}\ .$$

Bzw. kurz:

$$1 \mid 2,3,4 \quad 2 \mid 1,3,4 \quad 3 \mid 1,2,4 \quad 4 \mid 1,2,3 \quad 1,2 \mid 3,4 \quad 1,3 \mid 2,4 \quad 1,4 \mid 2,3$$

Also ist $S_{4,2} = 7$.

Quizfragen

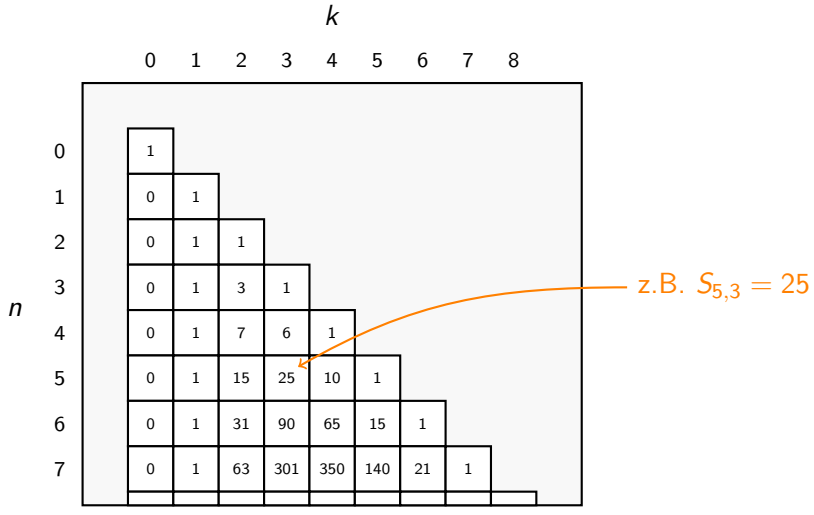
1. Was ist $S_{3,1}$?
2. Was ist $S_{3,2}$?
3. Was ist $S_{4,1}$?
4. Was ist $S_{4,3}$?
5. Was ist $S_{n,0}$ für $n \in \mathbb{N}$?
6. Was ist $S_{n,1}$ für $n \in \mathbb{N}$?
7. Was ist $S_{n,n-1}$ für $n \in \mathbb{N}$?
8. Was ist $S_{n,n}$ für $n \in \mathbb{N}_0$?

Antworten

1. $S_{3,1} = 1$.
2. $S_{3,2} = 3$.
3. $S_{4,1} = 1$.
4. $S_{4,3} = 6$.
5. $S_{n,0} = 0$.
6. $S_{n,1} = 1$.
7. $S_{n,n-1} = \binom{n}{2}$.
8. $S_{n,n} = 1$.

Info

Die Werte von $S_{n,k}$ können in folgendem Dreieck abgelesen werden.



Rekursive Berechnung

Die Stirling-Zahl zweiter Art $S_{n,k}$ genügt für alle $n, k \in \mathbb{N}$ mit $k \leq n$ die Rekursion

$$S_{n,k} = S_{n-1,k-1} + k \cdot S_{n-1,k}$$

mit $S_{0,0} = 1$, $S_{n,0} = 0$ und $S_{n,n} = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Intuition

Wenn man k Klassen mit Zahlen aus $[n]$ füllen möchte, dann kann das Element n entweder alleine in einer Klasse sein oder nicht (deswegen „+“).

- Falls n alleine in einer Klasse ist, so hat man für die restlichen $n-1$ Elemente nur noch $k-1$ Klassen. Daher gibt es hierfür $S_{n-1,k-1}$ Möglichkeiten.
- Falls n nicht alleine in einer Klasse ist, so muss man die restlichen $n-1$ Elemente in allen k Klassen verteilen ($S_{n-1,k}$ Möglichkeiten) und dann (deswegen jetzt „$\cdot$“) das Element n in eine der k Klassen hinzufügen (k Möglichkeiten). Insgesamt gibt es hierfür $k \cdot S_{n-1}k$ Möglichkeiten.

Rechenregeln für Stirlingzahlen zweiter Art

Folgende Rechenregeln sind für Stirlingzahlen zweiter Art wichtig. Es gilt für $n, k \in \mathbb{N}_0$:

$$
\begin{aligned}
&S_{n,k} = S_{n-1,k-1} + k \cdot S_{n-1,k} \ , && 1 \leq n, k && \text{(Rekursive Berechnung)} \\
&S_{n,0} = 0 \ , && 1 \leq n \\
&S_{n,1} = 1 \ , && 1 \leq n \\
&S_{n,2} = 2^{n-1} - 1 \ , && 1 \leq n \\
&S_{n,n-1} = \binom{n}{2} = \frac{n \cdot (n-1)}{2} \ , && 1 \leq n \\
&S_{n,n} = 1
\end{aligned}
$$

Diese Rechenregeln kann man sehr schön am Dreieck für Stirlingzahlen zweiter Art erkennen!

Themenübersicht

Zahlpartitionen

$P_{n,k}$ gibt die Anzahl der Partitionen der n-elementigen Multimenge $\{\!|1,1,\ldots,1|\!\}$ (s. Folie 631) in k nichtleere Klassen an. Intuitiv gibt $P_{n,k}$ die Anzahl der Möglichkeiten, n als Summe von k Summanden aus $\mathbb{N}$ darzustellen.

Beispiel

Es gibt genau 4 3-Partitionen über $\{\!|1,1,1,1,1,1,1|\!\}$:

$$\begin{aligned}
&\{\!|\{\!|1|\!\},\{\!|1|\!\},\{\!|1,1,1,1,1|\!\}|\!\},\\
&\{\!|\{\!|1|\!\},\{\!|1,1|\!\},\{\!|1,1,1,1|\!\}|\!\},\\
&\{\!|\{\!|1|\!\},\{\!|1,1,1|\!\},\{\!|1,1,1|\!\}|\!\},\\
&\{\!|\{\!|1,1|\!\},\{\!|1,1|\!\},\{\!|1,1,1|\!\}|\!\}.
\end{aligned}$$

Bzw. kurz:

$$7 \;=\; 1+1+5 \;=\; 1+2+4 \;=\; 1+3+3 \;=\; 2+2+3.$$

Also ist $P_{7,3} = 4$.

Quizfragen

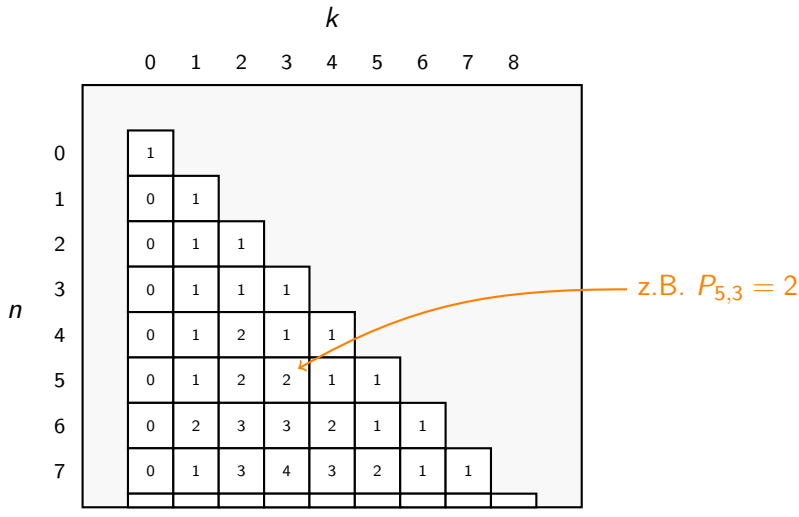
1. Was ist $P_{6,4}$?
2. Was ist $P_{6,5}$?
3. Was ist $P_{7,2}$?
4. Was ist $P_{8,3}$?
5. Was ist $P_{n,0}$ für $n \in \mathbb{N}$?
6. Was ist $P_{n,1}$ für $n \in \mathbb{N}$?
7. Was ist $P_{n,2}$ für $n \in \mathbb{N}$?
8. Was ist $P_{n,n-1}$ für $n \in \mathbb{N}$?
9. Was ist $P_{n,n}$ für $n \in \mathbb{N}_0$?

Antworten

1. $P_{6,4} = 2$.
2. $P_{6,5} = 1$.
3. $P_{7,2} = 3$.
4. $P_{8,3} = 5$.
5. $P_{n,0} = 0$.
6. $P_{n,1} = 1$.
7. $P_{n,2} = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.
8. $P_{n,n-1} = 1$.
9. $P_{n,n} = 1$.

Info

Die Werte von $P_{n,k}$ können in folgendem Dreieck abgelesen werden.



Erste Rekursive Berechnung

Die Zahlpartition $P_{n,k}$ genügt für alle $n, k \in \mathbb{N}$ mit $k \leq n$ die Rekursion

$$P_{n,k} = \sum_{i=0}^{k} P_{n-k,i} = P_{n-k,0} + P_{n-k,1} + P_{n-k,2} + \ldots + P_{n-k,k}$$

mit $P_{0,0} = 1$, $P_{n,0} = 0$ und $P_{n,n} = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Intuition

Man möchte n 1en in k Klassen so verteilen, dass keine Klasse leer bleibt. Man kann als erstes in jede Klasse zuerst genau eine 1 hinzufügen, so dass wir nur noch $n-k$ übrig haben. Dann gilt:

- entweder wir fügen alle restlichen $n-k$ 1en in keine Klasse hinzu ($P_{n-k,0} = 0$ Möglichkeiten, falls $n-k \neq 0$ bzw. $P_{n-k,0} = 1$ Möglichkeit, falls $n-k=0$)
- oder wir fügen alle restlichen $n-k$ 1en in eine Klasse hinzu ($P_{n-k,1}$ Möglichkeiten)
- oder wir verteilen sie auf zwei Klassen ($P_{n-k,2}$ Möglichkeiten)
- oder wir verteilen sie auf drei Klassen ($P_{n-k,3}$ Möglichkeiten)
- ...
- oder wir verteilen sie auf alle k Klassen ($P_{n-k,k}$ Möglichkeiten)

Zweite rekursive Berechnung

Aus der ersten Formel folgt: $P_{n-1,k-1} = \sum_{i=0}^{k-1} P_{n-k,i}$. Ersetzt man nun die ersten $k-1$ Summanden der Summe $\sum_{i=0}^{k} P_{n-k,i}$ durch $P_{n-1,k-1}$ erhält man folgende äquivalente Aussage für alle $n, k \in \mathbb{N}$:

$$P_{n,k} = P_{n-1,k-1} + P_{n-k,k}$$

wieder mit $P_{0,0} = 1$, $P_{n,0} = 0$ und $P_{n,n} = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Intuition

Entweder es gibt mindestens eine Klasse mit nur einer 1 oder nicht.

- Falls eine Klasse nur eine 1 hat, dann muss man lediglich die restlichen $n-1$ 1en auf die restlichen $k-1$ Klassen verteilen ($P_{n-1,k-1}$ Möglichkeiten)
- Falls alle Klassen mindestens zwei 1en haben so kann man sich von jeder Klasse eine 1 „wegdenken“ und nur $n-k$ 1en auf die k Klassen verteilen.

Rechenregeln für Zahlpartitionen

Folgende Rechenregeln sind für Zahlpartitionen wichtig. Es gilt für $n, k \in \mathbb{N}_0$:

$$P_{n,k} = \sum_{i=0}^{k} P_{n-k,i} \ , \qquad 1 \leq n, k \qquad \text{(Erste rekursive Berechnung)}$$

$$P_{n,k} = P_{n-1,k-1} + P_{n-k,k} \ , \qquad 1 \leq n, k \qquad \text{(Zweite rekursive Berechnung)}$$

$$P_{n,0} = 0 \ , \qquad 1 \leq n$$

$$P_{n,1} = 1 \ , \qquad 1 \leq n$$

$$P_{n,2} = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \ , \qquad 1 \leq n$$

$$P_{n,n-1} = 1 \ , \qquad 1 \leq n$$

$$P_{n,n} = 1$$

Diese Rechenregeln kann man sehr schön am Dreieck für Zahlpartitionen erkennen!

Vergleich: $s_{n,k}$ vs. $S_{n,k}$ vs. $P_{n,k}$

Mit $s_{n,k}$, $S_{n,k}$ und $P_{n,k}$ zählen wir die Möglichkeiten irgendwelche Elemente in nicht unterscheidbaren Zyklen bzw. Klassen zu verteilen.

- Bei $s_{n,k}$ sind die Elemente alle verschieden und die Reihenfolge der Elemente innerhalb eines Zykels spielt eine Rolle.
- Bei $S_{n,k}$ sind die Elemente, wie bei $s_{n,k}$, alle verschieden, aber die Reihenfolge der Elemente innerhalb einer Klasse ist irrelevant.
- Bei $P_{n,k}$ sind die Elemente alle gleich (das heißt es spielt keine Rolle welches wo landet) und die Reihenfolge der Elemente innerhalb einer Klasse ist ebenfalls irrelevant.

Übersichtlicher als Tabelle:

Zählkoeffizient	Elemente	Reihenfolge der Elemente	Reihenfolge der Klassen
$s_{n,k}$	verschieden	Zyklus	irrelevant
$S_{n,k}$	verschieden	irrelevant	irrelevant
$P_{n,k}$	gleich	irrelevant	irrelevant

Deswegen gilt für alle $n, k \in \mathbb{N}_0$:

$$P_{n,k} \leq S_{n,k} \leq s_{n,k} \ .$$

Beispiel

$s_{4,2} = 11$	$S_{4,2} = 7$	$P_{4,2} = 2$
$(1)(2,3,4)$	$\{\{1\},\{2,3,4\}\}$	$\{\{\{1\}\},\{1,1,1\}\}$
$(1)(2,4,3)$		
$(2)(1,3,4)$	$\{\{2\},\{1,3,4\}\}$	
$(2)(1,4,3)$		
$(3)(1,2,4)$	$\{\{3\},\{1,2,4\}\}$	
$(3)(1,4,2)$		
$(4)(1,2,3)$	$\{\{4\},\{1,2,3\}\}$	
$(4)(1,3,2)$		
$(1,2)(3,4)$	$\{\{1,2\},\{3,4\}\}$	$\{\{\{1,1\}\},\{1,1\}\}$
$(1,3)(2,4)$	$\{\{1,3\},\{2,4\}\}$	
$(1,4)(2,3)$	$\{\{1,4\},\{2,3\}\}$	

Themenübersicht

Fixpunkte

Seien M eine Menge, $f\colon M \to M$ eine Funktion und $x \in M$ ein beliebiges Element. x ist ein Fixpunkt von f, falls $f(x) = x$ gilt. Die Menge aller Fixpunkten von f bezeichnen wir mit $\mathrm{fix}(f)$.

Beispiele

- Für $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ mit $f(x) = x^2$ gilt $\mathrm{fix}(f) = \{0, 1\}$.
- Für $g\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ mit $g(x) = x + 1$ gilt $\mathrm{fix}(g) = \emptyset$.
- Für $h\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ mit $h(x) = x$ gilt $\mathrm{fix}(h) = \mathbb{Z}$.
- Für die Permutation $p = (1, 3)(2)(4, 6, 5)(7)$ gilt $\mathrm{fix}(p) = \{2, 7\}$
- Für die Permutation $\mathrm{id}_{[n]} = (1)(2)(3)\ldots(n)$ gilt $\mathrm{fix}(\mathrm{id}_{[n]}) = [n]$.

Rencontres-Zahlen

$D_{n,k}$ gibt die Anzahl der Permutationen einer n-elementigen Menge an, die genau k Fixpunkte besitzen.

Beispiel

Es gibt genau 6 Permutationen über [4] mit genau 2 Fixpunkten:

$$(1,2)(3)(4), \quad (1,3)(2)(4), \quad (1,4)(2)(3), \quad (1)(2,3)(4), \quad (1)(2,4)(3), \quad (1)(2)(3,4).$$

Also ist $D_{4,2} = 6$.

Noch ein Beispiel

Es gibt genau $3! = 6$ Permutationen über $[3]$. Für diese gilt:

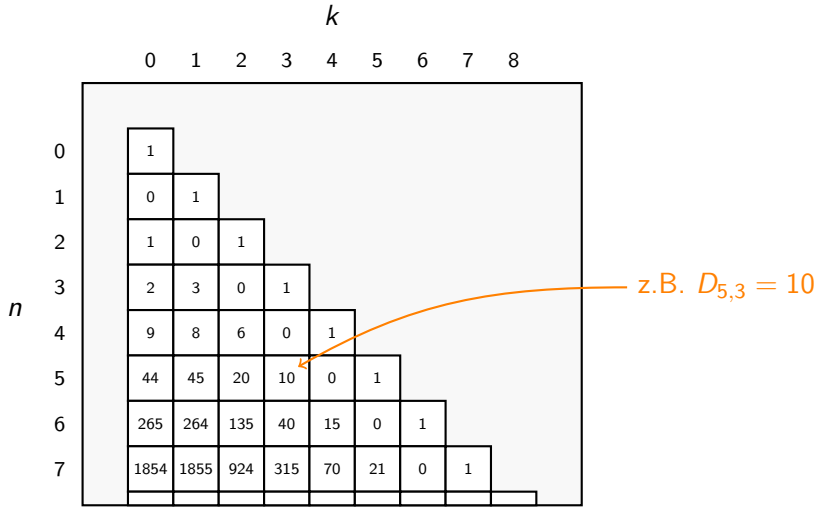
p	$\mathrm{fix}(p)$	$\lvert\mathrm{fix}(p)\rvert$
(1)(2)(3)	$\{1,2,3\}$	3
(1,2)(3)	$\{3\}$	1
(1,3)(2)	$\{2\}$	1
(1)(2,3)	$\{1\}$	1
(1,2,3)	$\emptyset$	0
(1,3,2)	$\emptyset$	0

Also gilt:

$$D_{3,0} = 2, \quad D_{3,1} = 3, \quad D_{3,2} = 0 \quad \text{und} \quad D_{3,3} = 1.$$

Info

Die Werte von $D_{n,k}$ können in folgendem Dreieck abgelesen werden.

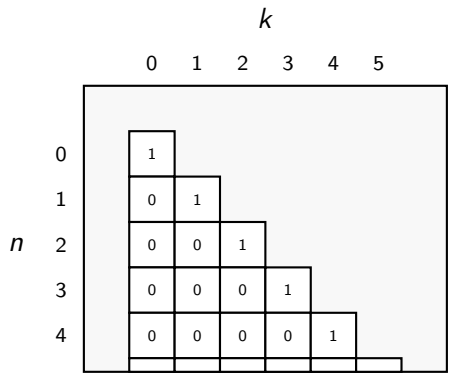


Kronecker-Delta

$\delta_{n,k}$ gibt einfach an, ob $n = k$ gilt oder nicht.

$$\delta_{n,k} = \begin{cases} 1 & \text{falls } n = k \\ 0 & \text{falls } n \neq k \end{cases}$$

Das Dreieck für $\delta_{n,k}$ ist entsprechend kompliziert.



Themenübersicht

Themenübersicht

Goldene Tabelle

Wir zählen die Anzahl aller möglichen Verteilungen von k Bällen auf n Urnen.

k Bälle $\to$ n Urnen		**1** beliebig viele Bälle pro Urne („beliebig“)	**2** höchstens ein Ball pro Urne („injektiv“)	**3** mindestens ein Ball pro Urne („surjektiv“)	**4** genau ein Ball pro Urne („bijektiv“)
A	Bälle unterscheidbar Urnen unterscheidbar	n^k	$n^{\underline{k}}$	$n! \cdot S_{k,n}$	$k!$
B	Bälle gleich Urnen unterscheidbar	$\binom{k+n-1}{k}$	$\binom{n}{k}$	$\binom{k-1}{n-1}$	1
C	Bälle unterscheidbar Urnen gleich	$\sum_{i=0}^{n} S_{k,i}$	1	$S_{k,n}$	1
D	Bälle gleich Urnen gleich	$\sum_{i=0}^{n} P_{k,i}$	1	$P_{k,n}$	1

Infos

- Damit die Verteilungen injektiv, surjektiv oder bijektiv sein können, muss entsprechend $k \leq n$, $k \geq n$ oder $k = n$ gelten, sonst ist die Anzahl solcher Verteilungen natürlich Null ;-)
- Falls $k = n$ gilt, dann liefern die Formeln für injektiv, surjektiv und bijektiv dieselben Ergebnisse.
- Oft steht in den Musterlösungen $\frac{\overline{n^k}}{k!}$ statt $\binom{k+n-1}{k}$.
- Falls Bälle und Urnen unterscheidbar sind, dann ist die Verteilung automatisch eine Funktion.
- Dieses Modell ist eine Erweiterung des Modells auf Folie 639:

	mit Zurücklegen	ohne Zurücklegen
Reihenfolge relevant	n^k	$\underline{n^k}$
Reihenfolge irrelevant	$\binom{k+n-1}{k}$	$\binom{n}{k}$

Rezept

Frage: Wie benutzt man die goldene Tabelle richtig?
Methode: Man stellt sich für jede der gegebenen Mengen folgende zwei Fragen:

Darf ein beliebiges Element aus dieser Menge mit

1. mehreren
2. Null

Elementen aus der anderen Menge in Verbindung stehen?

Hat eine der beiden Mengen auf beide Fragen *nein* als Antwort, dann sind das die Bälle! Für die andere Menge gilt dann:

1. Frage	*ja*	*nein*	*ja*	*nein*
2. Frage	*ja*	*ja*	*nein*	*nein*
Verteilung	beliebig	injektiv	surjektiv	bijektiv

Bei bijektiven Funktionen ist es dann egal was Bälle und was Urnen sind! ;-)

Beispiele

1. Wir würfeln mit mehreren Würfeln gleichzeitig. Jeder Würfel zeigt eine von 6 verschiedenen Zahlen.
   - Es kann nicht passieren, dass ein Würfel mehr als eine oder keine Zahl zeigt.
   - Eine Zahl kann mehr als einmal oder auch Null mal vorkommen.

   Es gilt also:

   $$f : \text{Würfeln} \to \text{Zahlen} \qquad \text{(beliebig)}$$

2. Wir verteilen ganze Schokoladen auf Studenten.
   - Es gibt gierige Studenten die mehr als eine Schokolade essen und auch andere die auf Diät sind und gar keine essen.
   - Schokoladen werden nicht geteilt und auch nicht weggeschmissen.

   Es gilt also:

   $$f : \text{Schokoladen} \to \text{Studenten} \qquad \text{(beliebig)}$$

3. Hühner legen bekanntlich Eier.
   - Ein Huhn kann mehrere oder auch gar keine Eier legen.
   - Ein Ei wird nicht von mehreren Hühnern gelegt und entsteht auch nicht von alleine.

   Es gilt also:

$$f : \text{Eier} \to \text{Hühner} \qquad \text{(beliebig)}$$

4. Wir spielen Lotto. Es werden Zahlen ohne zurücklegen gezogen.
   - Eine Zahl kann nicht mehrmals gezogen werden, aber es kann schon passieren, dass sie nicht gezogen wird.
   - In einer Ziehung kann man nicht mehr und auch nicht weniger als eine Zahl ziehen.

   Es gilt also:

$$f : \text{Ziehungen} \to \text{Zahlen} \qquad \text{(injektiv)}$$

5. Informatikstudenten organisieren sich, um zusammen in Autos nach Garching zu fahren.
   - Ein Student kann nicht in zwei Autos sein und bleibt auch nicht ohne Mitfahrgelegenheit.
   - In einem Auto passen mehrere Studenten rein, aber das Auto kann nicht leer sein (noch fahren Autos nicht von alleine).

   Es gilt also:

   $$f : \text{Informatikstudenten} \to \text{Autos} \qquad \text{(surjektiv)}$$

6. Jeder von 11 Fußballspieler zieht vor dem Spiel eins von 11 Trikots an.
   - Kein Spieler trägt mehr oder weniger als ein Trikot.
   - Kein Trikot wird von mehr oder weniger als ein Spieler getragen.

   Es gilt also:

   $$f : \text{Fußballspieler} \to \text{Trikots} \qquad \text{(bijektiv)}$$

   Oder auch:

   $$f : \text{Trikots} \to \text{Fußballspieler} \qquad \text{(bijektiv)}$$

Quizfragen

Eine Banane, ein Apfel, eine Orange und eine Pflaume werden auf 2 Körbe verteilt. Wie viele Verteilungsmöglichkeiten gibt es in jedem der folgenden Fälle?

1. Die Körbe sind unterscheidbar,
2. Die Körbe sind unterscheidbar und kein Korb darf leer bleiben,
3. Die Körbe sind unterscheidbar und jeder Korb soll genau 2 Obststücke bekommen,
4. Die Körbe sind nicht unterscheidbar,
5. Die Körbe sind nicht unterscheidbar und kein Korb darf leer bleiben,
6. Die Körbe sind nicht unterscheidbar und jeder Korb soll genau 2 Obststücke bekommen.

Gib dein Ergebnis als Zahl und nicht als unausgewertetem mathematischen Ausdruck an.

Antworten

1. Verteile 4 unterscheidbare Bälle auf 2 unterscheidbare Urnen beliebig: $2^4 = 16$.
2. Verteile 4 unterscheidbare Bälle auf 2 unterscheidbare Urnen surjektiv: $2! \cdot S_{4,2} = 2 \cdot 7 = 14$.
3. Für den ersten Korb wähle 2 Obststücke aus 4 und für den zweiten 2 aus 2: $\binom{4}{2} \cdot \binom{2}{2} = 6$.
4. Verteile 4 unterscheidbare Bälle auf 2 gleiche Urnen beliebig: $S_{4,1} + S_{4,2} = 1 + 7 = 8$.
5. Verteile 4 unterscheidbare Bälle auf 2 gleiche Urnen surjektiv: $S_{4,2} = 7$.
6. Für den ersten Korb wähle 2 Obststücke aus 4 und für den zweiten 2 aus 2. Da die Körbe gleich sind, sind je zwei Verteilungen identisch und wir müssen durch 2 dividieren: $\frac{\binom{4}{2} \cdot \binom{2}{2}}{2} = 3$.

Der Weihnachtsmann hat dieses Jahr von 12 Informatikstudenten der TUM keinen Wunschzettel bekommen. (Es gibt tatsächlich Leute, die nicht an den Weihnachtsmann glauben!) Zu Hause am Nordpol hat er noch von Weihnachten 24 identische Socken übrig, die er jetzt großzügigerweise den Studenten nachträglich schenken möchte. Wie viele Verteilungsmöglichkeiten gibt es in jedem der folgenden Fälle?

1. Er verteilt alle 24 Socken irgendwie auf die 12 Studenten.
2. Er hält das für zu unpersönlich und entscheidet jede Socke mit einer unterschiedlichen Farbe zu färben und verteilt sie dann alle irgendwie.
3. Er möchte sparsamer mit seinen Socken umgehen und beschließt 12 der 24 gefärbten Socken irgendwie zu verteilen und 12 für sich zu behalten (für nächstes Jahr).
4. Er hält diese Idee für zu unfair und beschließt 12 der 24 gefärbten Socken fair zu verteilen (also eine Socke pro Student) und 12 für sich zu behalten.
5. Er merkt, dass man mit nur einer Socke nicht viel anfangen kann und beschließt aus den 24 gefärbten Socken 12 Paare zu bilden und diese fair zu verteilen.

Antworten

1. Verteile 24 gleiche Bälle auf 12 unterscheidbare Urnen beliebig: $\binom{24+12-1}{24} = \binom{35}{24}$.
2. Verteile 24 unterscheidbare Bälle auf 12 unterscheidbare Urnen beliebig: 12^{24}.
3. Wähle zuerst 12 aus 24 und verteile dann die restlichen 12 beliebig. $\binom{24}{12} \cdot 12^{12}$.
4. Wie 4., aber bijektiv: $\binom{24}{12} \cdot 12! = \frac{24^{\underline{12}}}{12!} \cdot 12! = 24^{\underline{12}}$. Alternativ: verteile die Studenten injektiv auf die Socken.
5. Wähle für Student 2 aus 24 Socken für Student 1, dann 2 aus 22 für Student 2, dann 2 aus 20 für Student 3, usw.: $\binom{24}{2} \cdot \binom{22}{2} \cdot \binom{20}{2} \cdot \ldots \cdot \binom{2}{2} = \frac{24!}{(2!)^{12}}$.

Themenübersicht

Wir betrachten jetzt Aufgaben die etwa so aussehen:

> *m verschiedene Urnen stehen nebeneinander. Nun werden n Bälle so auf die Urnen geworfen, dass in jeder Urne höchstens ein Ball landet und jede Urne, in der ein Ball landet, benachbarte Urnen beeinflusst.*

Die Anzahl an Verteilungsmöglichkeiten ermittelt man nicht, indem man Bälle auf Urnen verteilt, sondern leere Urnen auf Zwischenräume. Das Rezept dazu steht auf der nächsten Folie.

Rezept

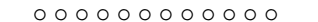
Frage: Wie verteilt man leere Urnen auf Zwischenräume?
Methode: Zähle die Anzahl der Möglichkeiten für folgende Schritte und multipliziere sie zusammen.

1. Stelle die Bälle in eine Reihe (eindeutig, falls alle Bälle gleich sind bzw. $n!$ Möglichkeiten, falls alle unterschiedlich sind).
2. Von den m Urnen sind n belegt und $m - n$ leer. Verteile einige der leeren Urnen so auf die $n + 1$ Zwischenräume neben den Bällen, dass alle notwendigen Bedingungen erfüllt werden.
3. Verteile schließlich die restlichen leeren Urnen auf die Zwischenräume.

Die Urnen werden dabei als gleich betrachtet. Ihre Nummerierung ergibt sich dann aus der Verteilung.

Beispiel

Aufgabe: Wir betrachten ein Parkhaus mit 12 nebeneinander stehenden Parkplätzen



und drei gleiche Monstertrucks, die dort parken wollen. Aufgrund ihrer absurden Größe, belegen die Mostertrucks jeweils zwei benachbarte Parkplätze. Außerdem soll links und rechts von jedem Monstertruck mindestens ein Parkplatz zum Rangieren freigehalten werden.

Eine Parkmöglichkeit wäre beispielsweise:

Wie viele solche Parkmöglichkeiten gibt es?

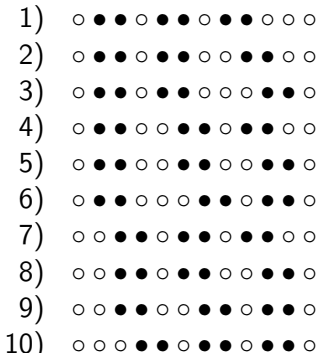
Lösung: Wir modellieren belegte Parkplätze mit • und freie Parkplätze mit ∘ und verteilen dann freie Parkplätze auf Zwischenräume wie folgt.

1. Weil die Monstertrucks alle gleich sind, gibt es nur eine Möglichkeit sie in eine Reihe anzuordnen:

2. Weil links und rechts von jedem Monstertruck ein freier Platz sein muss, werden von den 6 freien Parkplätzen 4 auf die Zwischenräume verteilt (jeweils 1). Hierfür gibt es auch nur eine Möglichkeit:

3. Die übrigen 2 freien Parkplätze werden beliebig auf die 4 unterscheidbaren Zwischenräume verteilt. Hierfür gibt es genau $\binom{2+4-1}{2} = \binom{5}{2} = 10$ Möglichkeiten.

Das sind die 10 Parkmöglichkeiten:



Quizfragen

Wir betrachten wieder ein Parkhaus mit 40 nebeneinander stehenden Parkplätzen. Wieder wollen Monstertrucks parken, die jeweils zwei Parkplätze belegen. Wie viele Parkmöglichkeiten gibt es in den folgenden Szenarien?

1. Es sind 12 gleiche Monstertrucks.
2. Es sind 9 verschiedene Monstertrucks und zwischen je zwei Monstertrucks muss mindestens ein Parkplatz frei bleiben.
3. Es sind 3 *Snakebites*, 2 *Ghostriders* und ein *Bigfoot*. Außerdem müssen zwischen je zwei Monstertrucks mindestens drei Parkplätze frei bleiben.

Antworten

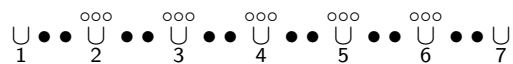
1. Bei 12 gleichen Monstertrucks ist die Reihenfolge eindeutig. Weil zwischen ihnen keine Parkplätze frei bleiben müssen, werden keine freien Parkplätze im Voraus verteilt:

   Schließlich werden die übrigen 16 freien Parkplätze beliebig auf 13 Zwischenräume verteilt. Hierfür gibt es $\binom{16+13-1}{16} = \binom{28}{16}$ Möglichkeiten. Das ist auch die Gesamtanzahl an Parkmöglichkeiten.

2. Bei 9 verschiedenen Monstertrucks gibt es 9! verschiedene Reihenfolgen. Von den 22 freien Parkplätzen werden 8 zwischen den Monstertrucks verteilt (1 pro Zwischenraum).

Schließlich werden die übrigen 14 freien Parkplätze beliebig auf 10 Zwischenräume verteilt. Hierfür gibt es $\binom{14+10-1}{14} = \binom{23}{14}$ Möglichkeiten. Insgesamt gibt es also $9! \cdot \binom{23}{14}$ Parkmöglichkeiten.

3. Bei 3 *Snakebites*, 2 *Ghostriders* und einem *Bigfoot* gibt es $\frac{6!}{3!\cdot 2!\cdot 1!} = 60$ verschiedene Reihenfolgen. Von den 28 freien Parkplätzen werden 15 zwischen den Monstertrucks verteilt (3 pro Zwischenraum).



Schließlich werden die übrigen 13 freien Parkplätze beliebig auf 7 Zwischenräume verteilt. Hierfür gibt es $\binom{13+7-1}{13} = \binom{19}{13}$ Möglichkeiten. Insgesamt gibt es also $60 \cdot \binom{19}{13}$ verschiedene Parkmöglichkeiten.

Quizfragen

7 Studenten bekommen am Tag der DS Klausur Sitzplätze in der ersten Reihe des Hörsaales zugewiesen. Diese besitzt 24 Sitzplätze. Wie viele mögliche Verteilungen gibt es in den folgenden Szenarien?

1. Damit sie nicht voneinander abschreiben können, sollen zwischen je zwei Studenten mindestens zwei Sitzplätze frei bleiben.
2. 3 der 7 Studenten kommen zu früh in die Klausur und legen sich auf den Sitzplätzen zum Schlafen hin. Dabei belegt jeder genau 5 Sitzplätze.
3. Nun erscheinen für die Klausur doppelt so viele Studenten wie angemeldet waren. Das heißt, dass 14 Studenten sich nun die erste Reihe teilen müssen. Dabei dürfen die äußeren zwei Sitzplätze nicht frei bleiben. Weil die Studenten alle voneinander abschreiben wollen, soll es zwischen je zwei Studenten höchstens einen freien Platz geben.

Hinweis: Natürlich sind Studenten unterscheidbar! ;-)

Antworten

Wir modellieren freie Sitzplätze mit $\circ$ und belegte Sitzplätze mit $\bullet$.

1. Bei 7 Studenten gibt es 7! Reihenfolgen. Von den 17 freien Sitzplätzen werden 12 zwischen den Studenten verteilt:

   $$\underset{1}{\cup}\bullet\overset{\circ\circ}{\underset{2}{\cup}}\bullet\overset{\circ\circ}{\underset{3}{\cup}}\bullet\overset{\circ\circ}{\underset{4}{\cup}}\bullet\overset{\circ\circ}{\underset{5}{\cup}}\bullet\overset{\circ\circ}{\underset{6}{\cup}}\bullet\overset{\circ\circ}{\underset{7}{\cup}}\bullet\underset{8}{\cup}$$

   Schließlich werden die übrigen 5 freien Sitzplätze beliebig auf 8 Zwischenräume verteilt. Hierfür gibt es $\binom{5+8-1}{5} = \binom{12}{5}$ Möglichkeiten. Insgesamt gibt es also $7! \cdot \binom{12}{5}$ Verteilungsmöglichkeiten.

2. Bei 3 Studenten gibt es 3! Reihenfolgen. Weil jeder von ihnen 5 Sitzplätze belegt, gibt es 9 frei Sitzplätze. Weil zwischen den Studenten keine Sitzplätze frei bleiben müssen, werden keine freien Sitzplätze im Voraus verteilt:

Schließlich werden die 9 freien Sitzplätze beliebig auf 4 Zwischenräume verteilt. Hierfür gibt es $\binom{9+4-1}{9} = \binom{12}{9}$ Möglichkeiten. Insgesamt gibt es also $3! \cdot \binom{12}{9}$ Verteilungsmöglichkeiten.

3. Bei 14 Studenten gibt es 14! Reihenfolgen. Weil zwischen den Studenten keine Sitzplätze frei bleiben müssen, werden keine freien Sitzplätze im Voraus verteilt:

Weil die äußeren Sitzplätze nicht frei sein dürfen, gibt es nur die 13 inneren Zwischenräume. Die übrigen 10 freien Sitzplätze werden also so auf 13 Zwischenräume, dass jeder Zwischenraum höchstens einen freien Platz bekommt (injektiv). Hierfür gibt es $\binom{13}{10}$ Möglichkeiten. Insgesamt gibt es also $14! \cdot \binom{13}{10}$ Verteilungsmöglichkeiten.

Themenübersicht

Themenübersicht

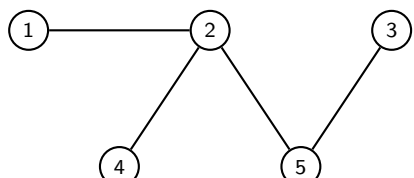
Themenübersicht

Graphen

Sei $\binom{V}{2} = \{M \subseteq V \mid |M| = 2\}$ die Menge aller 2-elementigen Teilmengen von V. Ein Graph $G = (V, E)$ besteht aus einer Menge V von Knoten und einer Menge $E \subseteq \binom{V}{2}$ von Kanten.

Beispiel

$G = (V, E)$ mit $V = [5]$ und $E = \{\{1, 2\}, \{2, 4\}, \{2, 5\}, \{3, 5\}\}$:



Erinnerung: $[n] = \{1, \ldots, n\}$.

Infos

- Nicht irritieren lassen! „$\binom{V}{2}$“ ist nur eine Schreibweise und kein Binomialkoeffizient! Es gilt beispielsweise:
$$\binom{\{a,b,c\}}{2} = \{\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\}\}.$$
Analog dazu wählt man z.B. „2^M“ für die Potenzmenge von M oder „B^A“ für die Menge aller Funktionen $f : A \to B$ damit gilt:
$$\left|2^M\right| = 2^{|M|}, \quad \left|B^A\right| = |B|^{|A|}, \quad \left|\binom{V}{2}\right| = \binom{|V|}{2}.$$
Aber wie gesagt: Dies sind nur Schreibweisen! Es heißt nicht, dass man einfach so Mengen in Potenzen oder Binomialkoeffizienten einsetzen darf, als wären sie normale Zahlen.
- Graphen sind ungerichtet, d.h. die Kanten zeigen in keine der beiden Richtungen. Deswegen zeichnet man sie als Striche und nicht als Pfeile. Die Begriffe *Graph*, *ungerichteter Graph* und *einfacher Graph* sind bei uns Synonyme.

Quizfragen

1. Kann ein Graph Schlingen haben?
2. Kann ein Graph Mehrfachkanten haben?
3. Wie viele Graphen mit Knotenmenge $V = [5]$ gibt es?

Hinweise:

- Eine Schlinge ist eine Kante von einem Knoten zu sich selbst.
- Eine Mehrfachkante ist eine Kante, die mehrmals vorkommt.
- Erinnerung: $[n] = \{1, \ldots, n\}$.

Antworten

1. Nein! Kanten sind 2-elementige Mengen, d.h. es kann keine Duplikate geben.
2. Auch nicht! Die Kanten sind in einer Menge E enthalten, d.h. wieder sind keine Duplikate erlaubt.
3. $\binom{V}{2}$ ist die Menge aller „potentiellen“ Kanten. Davon gibt es insgesamt $\binom{5}{2} = \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} = 10$ Stück. Da jede Teilmenge von $\binom{V}{2}$ eine mögliche Kantenmenge ist, entspricht die Anzahl an Graphen genau der Anzahl an Teilmengen von $\binom{V}{2}$, d.h.:

$$\left| \mathcal{P}\left(\binom{V}{2} \right) \right| = 2^{\left| \binom{V}{2} \right|} = 2^{\binom{5}{2}} = 2^{10} = 1024.$$

Nachbarschaften, Grade, Gradfolge und k-Regularität

Sei $G = (V, E)$ ein Graph.

- Die Nachbarschaft $\Gamma(v)$ („Gamma“) von einem Knoten v ist die Menge aller Knoten die mit v durch eine Kante verbunden sind, also:

$$\Gamma(v) := \{w \in V \mid \{v, w\} \in E\}.$$

  Die Knoten in $\Gamma(v)$ werden Nachbarn von v genannt.

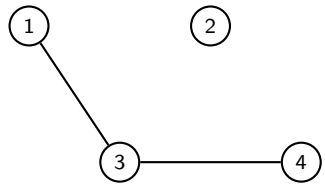
- Der Grad $\deg(v)$ eines Knotens v ist die Anzahl der Knoten, die mit v durch eine Kante verbunden sind, also:

$$\deg(v) := |\Gamma(v)|.$$

- Sei $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$. Dann heißt $(\deg(v_1), \ldots, \deg(v_n))$ eine Gradfolge von G.
- $\Delta(G) := \max\{\deg(v) \mid v \in V\}$ ist der Maximalgrad von G.
- $\delta(G) := \min\{\deg(v) \mid v \in V\}$ ist der Minimalgrad von G.
- Besitzt G die Gradfolge $(k, k, \ldots, k)$, so heißt G k-regulär.

Beispiel

Sei $G = (V, E)$ folgender Graph:

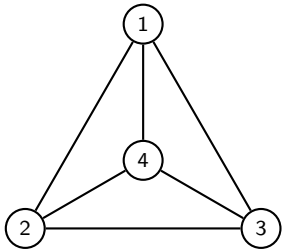


Es gilt:

- $\Gamma(1) = \{3\}$, $\Gamma(2) = \{\}$, $\Gamma(3) = \{1, 4\}$ und $\Gamma(4) = \{3\}$.
- $\deg(1) = 1$, $\deg(2) = 0$, $\deg(3) = 2$ und $\deg(4) = 1$.
- Eine Gradfolge von G ist $(0, 1, 1, 2)$.
- Der Maximalgrad von G ist $\Delta(G) = 2$.
- Der Minimalgrad von G ist $\delta(G) = 0$.
- G ist nicht k-regulär.

Noch ein Beispiel

Sei $G = (V, E)$ folgender Graph:

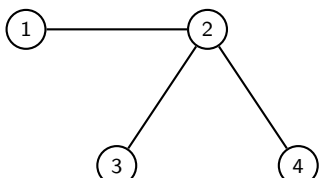


Es gilt:

- $\Gamma(1) = \{2, 3, 4\}$, $\Gamma(2) = \{1, 3, 4\}$, $\Gamma(3) = \{1, 2, 4\}$ und $\Gamma(4) = \{1, 2, 3\}$.
- $\deg(1) = 3$, $\deg(2) = 3$, $\deg(3) = 3$ und $\deg(4) = 3$.
- Die einzige Gradfolge von G ist $(3, 3, 3, 3)$.
- Der Maximalgrad von G ist $\Delta(G) = 3$.
- Der Minimalgrad von G ist $\delta(G) = 3$.
- G ist 3-regulär.

Info

Manchmal wird gefordert, dass eine Gradfolge auf- oder absteigend sortiert sein soll. Dies ist bei uns nicht der Fall. Insbesondere kann ein Graph also verschiedene Gradfolgen haben. Beispielsweise besitzt der Graph



vier verschiedene Gradfolgen: $(1, 1, 1, 3)$, $(1, 1, 3, 1)$, $(1, 3, 1, 1)$ und $(3, 1, 1, 1)$.

Wege, Pfade und Kreise

Sei $G = (V, E)$ ein Graph.

- Ein Weg der Länge k ist eine nichtleere Folge $(v_0, v_1, v_2, \ldots, v_k)$ von $k+1$ Knoten mit

$$\underbrace{\{v_0, v_1\}, \{v_1, v_2\}, \ldots, \{v_{k-1}, v_k\}}_{k \text{ paarweise benachbarte Kanten}} \in E.$$

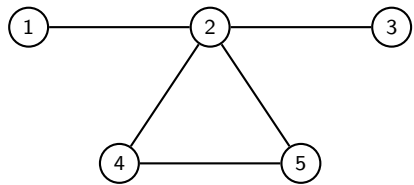
- Ein Pfad der Länge k ist ein Weg $(v_0, \ldots, v_k)$, in dem alle Knoten $v_0, \ldots, v_k$ paarweise verschieden sind.
- Ein Kreis der Länge k ist ein Weg $(v_0, \ldots, v_k)$, in dem alle Knoten $v_0, \ldots, v_{k-1}$ paarweise verschieden sind und $v_0 = v_k$ gilt.

Info

Graphen, die keine Kreise besitzen, nennt man kreisfrei oder azyklisch.

Beispiel

Sei $G = (V, E)$ folgender Graph:



- $(1, 2, 4, 5, 2, 3)$ ist ein Weg der Länge 5, der weder Pfad noch Kreis ist.
- $(1, 2, 3)$ ist ein Pfad der Länge 2.
- $(2, 4, 5, 2)$ ist ein Kreis der Länge 3.

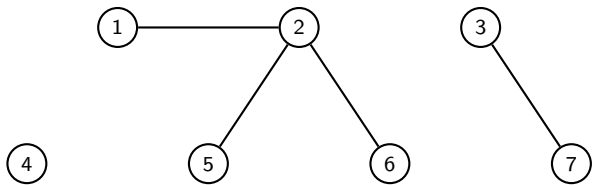
Erreichbarkeit und Zusammenhangskomponenten

Sei $G = (V, E)$ ein Graph.

- Der Knoten w ist vom Knoten v aus erreichbar, falls ein Pfad $(v, \ldots, w)$ in G existiert.
- Die Erreichbarkeit ist eine reflexive, symmetrische und transitive Relation auf Knoten, d.h. eine Äquivalenzrelation.
- Die Menge aller Knoten, die sich untereinander erreichen können, bilden eine Äquivalenzklasse und werden eine Zusammenhangskomponente von G gennant.
- Besitzt G genau eine Zusammenhangskomponente, dann nennt man G zusammenhängend.

Beispiel

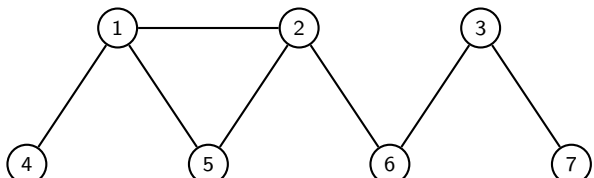
Sei $G = (V, E)$ folgender Graph:



- G hat genau 3 Zusammenhangskomponenten: $\{4\}$, $\{1, 2, 5, 6\}$ und $\{3, 7\}$.
- G ist nicht zusammenhängend.

Noch ein Beispiel

Sei $G = (V, E)$ folgender Graph:



- G hat nur eine Zusammenhangskomponente: $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. D.h. jeder Knoten ist von jedem anderen aus erreichbar.
- G ist also zusammenhängend.

k-partite Graphen

Sei $G = (V, E)$ ein Graph und $k \in \mathbb{N}_0$. G heißt k-partit, falls es eine k-Partition P der Knotenmenge V gibt, so dass keine Kante vollständig in eine der Klassen enthalten ist. D.h.:

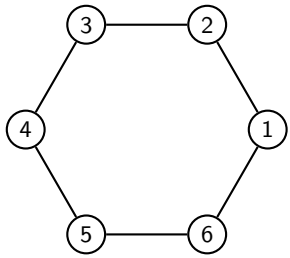
$$\forall u, v \in V, A \in P : \Big(\{u, v\} \in E \Longrightarrow \{u, v\} \not\subseteq A\Big).$$

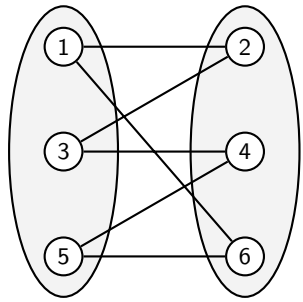
Infos

- Was eine k-Partition war kann auf Folie 43 aufgefrischt werden.
- 2-partite Graphen heißen bipartit und 3-partite tripartit.
- Dass ein Graph mehrere solcher k-Partitionen besitzt heißt nicht, dass es mehrere verschiedene k-partite Graphen sind.

Beispiel

Der folgende Graph ist bipartit.

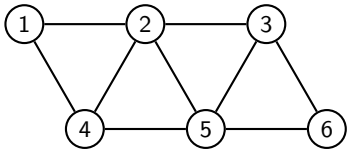


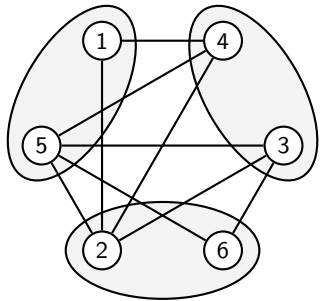


In der rechten Zeichnung wurden die Knoten umgeordnet und die zugrundeliegende Bipartition $P = \{\{1, 3, 5\}, \{2, 4, 6\}\}$ eingezeichnet.

Noch ein Beispiel

Der folgende Graph ist tripartit.

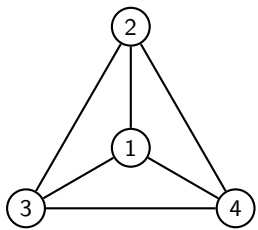


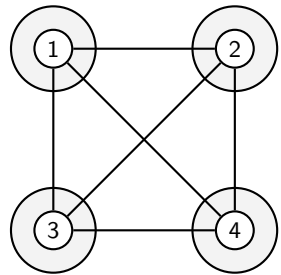


In der rechten Zeichnung wurden die Knoten umgeordnet und die zugrundeliegende Tripartition $P = \{\{1, 5\}, \{2, 6\}, \{3, 4\}\}$ eingezeichnet.

Ein letztes Beispiel

Der folgende Graph ist 4-partit.





In der rechten Zeichnung wurden die Knoten umgeordnet und die zugrundeliegende 4-Partition $P = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}\}$ eingezeichnet.

Quizfragen

1. Ist jeder k-partite Graph $G = (V, E)$ mit $|V| > k$ auch $(k+1)$-partit?
2. Ist jeder k-partite Graph $G = (V, E)$ mit $k > 1$ auch $(k-1)$-partit?
3. Wann ist ein Graph $G = (V, E)$ 1-partit?

Antworten

1. Ja! Wenn keine Kante innerhalb einer Knotenteilmenge V_i verläuft, dann kann man V_i beliebig in zwei weitere Mengen aufteilen und innerhalb von diesen wird ebenfalls keine Kante verlaufen. Somit ist jeder Graph $G = (V, E)$ automatisch $|V|$-partit.
2. Nein! Die Graphen aus den letzten drei Beispielen können als Gegenbeispiel benutzt werden. Der Graph auf Folie 770 ist bipartit, aber nicht 1-partit, der auf Folie 771 ist tripartit, aber nicht bipartit und der auf Folie 772 ist 4-partit, aber nicht tripartit. Wäre diese Aussage auch wahr, dann wäre jeder Graph $G = (V, E)$ automatisch 1-, 2-, 3-, ... und $|V|$-partit, was echt seltsam wäre.
3. Wenn $V \neq \emptyset$ und $E = \emptyset$. Gäbe es eine Kante $\{u, v\}$ in E, dann könnten u und v nicht in derselben Klasse sein und G wäre nicht 1-partit. Andererseits, falls $V = \emptyset$, dann ist nach Folie 43 $P = \{\}$ die einzige mögliche Partition der Knotenmenge V und G wäre dann 0-partit.

Teilgraphen und induzierte Teilgraphen

Sei $G = (V, E)$ ein Graph.

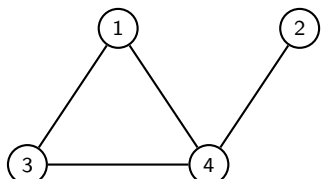
- $H = (V', E')$ heißt Teilgraph von G, falls $V' \subseteq V$ und $E' \subseteq E \cap \binom{V'}{2}$ gilt.
- $H = (V', E')$ heißt induzierter Teilgraph von G, falls $V' \subseteq V$ und $E' = E \cap \binom{V'}{2}$ gilt.

Erinnerung

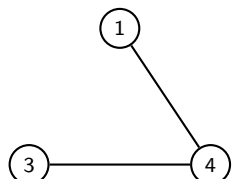
$\binom{V'}{2}$ enthält alle möglichen Kanten über der neuen Knotenmenge V'.

Beispiel

Seien $G = (V, E)$ und $H = (V', E')$ folgende Graphen:



G



H

H ist ein Teilgraph von G, aber kein induzierter Teilgraph, da $\{1, 3\} \notin E'$

Quizfrage

Was ist an folgender Überlegung falsch?

> *Möchte man zu $G = (V, E)$ einen Teilgraph $H = (V', E')$ konstruieren, so hat man $|\mathcal{P}(V)| = 2^{|V|}$ verschiedene Möglichkeiten für V' und $|\mathcal{P}(E)| = 2^{|E|}$ für E'. G hat also*
>
> $$2^{|V|} \cdot 2^{|E|} = 2^{|V|+|E|}$$
>
> *verschiedene Teilgraphen.*

Antwort

Das ist nur eine obere Schranke. Es gibt zwar genau $2^{|V|+|E|}$ Möglichkeiten ein Tupel (V', E') zu konstruieren, aber im Allgemeinen sind einige davon keine Graphen, beispielsweise wenn $\{v_i, v_j\} \in E'$ aber $v_i, v_j \notin V'$.

Deswegen kann man nur sagen, dass G höchstens so viele Teilgraphen besitzt.

Graphenisomorphie

Zwei Graphen $G = (V, E)$ und $H = (V', E')$ sind genau dann isomorph zueinander ($G \cong H$), wenn es eine Bijektion $h : V \to V'$ gibt, so dass für alle $u, v \in V$ gilt:

$$\{u, v\} \in E \iff \{h(u), h(v)\} \in E' \ .$$

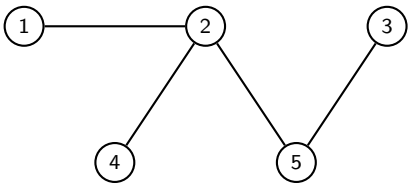
Intuitiv sind also G und H isomorph zueinander, wenn man die Knoten von G so umbenennen kann, dass G und H identisch sind.

Infos

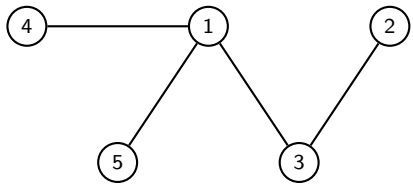
- Die Funktion h wird Isomorphismus genannt.
- Isomorphe Graphen haben dieselbe „Form“.
- Die Isomorphie ist eine Relation über Graphen. Sie ist reflexiv, symmetrisch und transitiv, also eine Äquivalenzrelation.

Beispiel

Seien $G = (V, E)$ und $H = (V', E')$ folgende Graphen



G



H

Mögliche Isomorphismen $h_1, h_2 : V \to V'$ wären:

$$h_1 : 1 \mapsto 4, 2 \mapsto 1, 3 \mapsto 2, 4 \mapsto 5, 5 \mapsto 3$$

und

$$h_2 : 1 \mapsto 5, 2 \mapsto 1, 3 \mapsto 2, 4 \mapsto 4, 5 \mapsto 3.$$

Wichtige Aussagen zu Graphen

1. Handshaking-Theorem. In jedem Graph $G = (V, E)$ gilt: $\sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E|$.
2. Satz von Havel-Hakimi. Seien $d_1, \ldots, d_n \in \mathbb{N}_0$ mit $d_1 \leq \ldots \leq d_n$, dann gibt es genau dann einen Graph G mit Gradfolge $(d_1, \ldots, d_n)$, wenn es einen Graph G' gibt mit Gradfolge
$$(\underbrace{d_1, \ldots, d_{n-d_n-1}}_{n-d_n-1 \text{ gleich}}, \underbrace{d_{n-d_n} - 1, \ldots, d_{n-1} - 1}_{d_n \text{ mit „}-1\text{“}}).$$
3. Für jeden Graph $G = (V, E)$ gilt:
   - Es gibt eine Zusammenhangskomponente in G mit mindestens $\Delta(G) + 1$ Knoten.
   - Jede Zusammenhangskomponente in G besitzt mindestens $\delta(G) + 1$ Knoten.
4. Für jeden Graph $G = (V, E)$ gilt:

G zusammenhängend	$\Longrightarrow$	$\lvert V\rvert \leq \lvert E\rvert + 1$	
G kreisfrei	$\Longrightarrow$	$\lvert V\rvert \geq \lvert E\rvert + 1$	
G kreisfrei	$\Longrightarrow$	$\lvert\{v \in V \mid \deg(v) = 1\}\rvert \geq 2$	(falls $\lvert V\rvert \geq 2$)
G kreisfrei	$\Longrightarrow$	G bipartit	(falls $\lvert E\rvert \geq 1$)
G bipartit	$\Longrightarrow$	$4\lvert E\rvert \leq \lvert V\rvert^2$	
$\Delta(G) + \delta(G) + 1 \geq \lvert V\rvert$	$\Longrightarrow$	G zusammenhängend	(folgt aus 3.)

Quizfragen

1. Gibt es für jedes $n \in \mathbb{N}$ einen 3-regulären Graph G mit n Knoten?
2. Gibt es einen Graph G mit Gradfolge $(1, 2, 3, 3, 3, 4, 4)$?
3. Gibt es einen Graph G mit Gradfolge $(2, 4, 4, 6, 6, 6, 7, 7)$?
4. Gibt es einen zusammenhängenden Graph G mit Gradfolge $(1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3)$?
5. Ist jeder Graph G mit Gradfolge $(2, 2, 3, 3, 4, 4, 6)$ zusammenhängend?
6. Ist jeder Graph G mit Gradfolge $(2, 2, 2, 3, 4, 5, 5, 6, 6, 7, 8)$ zusammenhängend?

1. Nein! Aus dem Handshaking-Theorem folgt, dass die Summe aller Grade gerade sein muss. Für n ungerade gibt es also keinen solchen Graph.
2. Ja! Aus dem Satz von Havel-Hakimi folgt, dass G genau dann existiert, wenn ein Graph mit Gradfolge $(0, 0, 0)$ (3 Knoten, keine Kanten) existiert.

Schritt	Gradfolge von G	Gradfolge von G'
1	$(1, 2, 3, 3, 3, 4, 4)$	$(1, 2, 2, 2, 2, 3)$
2	$(1, 2, 2, 2, 2, 3)$	$(1, 3, 1, 1, 1)$
3	$(1, 1, 1, 1, 2)$	$(1, 1, 0, 0)$
4	$(0, 0, 1, 1)$	$(0, 0, 0)$

Alternative Schreibweise:

$$(1,2,3,3,3,4,4) \xrightarrow{\text{HH}} (1,2,2,2,2,3) \xrightarrow{\text{HH}} (1,2,1,1,1) \xrightarrow{\text{sort.}} (1,1,1,1,2)$$
$$\xrightarrow{\text{HH}} (1,1,0,0) \xrightarrow{\text{sort.}} (0,0,1,1) \xrightarrow{\text{HH}} (0,0,0)$$

3. Nein! Aus dem Satz von Havel-Hakimi folgt, dass G genau dann existiert, wenn ein Graph mit Gradfolge $(0, -1, -1)$ existiert, was unmöglich ist.

Schritt	Gradfolge von G	Gradfolge von G'
1	$(2, 4, 4, 6, 6, 6, 7, 7)$	$(1, 3, 3, 5, 5, 5, 6)$
2	$(1, 3, 3, 5, 5, 5, 6)$	$(0, 2, 2, 4, 4, 4)$
3	$(0, 2, 2, 4, 4, 4)$	$(0, 1, 1, 3, 3)$
4	$(0, 1, 1, 3, 3)$	$(0, 0, 0, 2)$
5	$(0, 0, 0, 2)$	$(0, -1, -1)$

Alternative Schreibweise:

$$(2, 4, 4, 6, 6, 6, 7, 7) \xrightarrow{\text{HH}} (1, 3, 3, 5, 5, 5, 6) \xrightarrow{\text{HH}} (0, 2, 2, 4, 4, 4)$$
$$\xrightarrow{\text{HH}} (0, 1, 1, 3, 3) \xrightarrow{\text{HH}} (0, 0, 0, 2) \xrightarrow{\text{HH}} (0, -1, -1,)$$

4. Nein! Für $G = (V, E)$ würde gelten: $|V| = 11$ und $|E| = \frac{3+3+2+2+2+1+1+1+1+1+1}{2} = 9$. Wegen $|V| > |E| + 1$ kann G nicht zusammenhängend sein.
5. Ja! Für $G = (V, E)$ gilt $|V| = 7$ und $\Delta(G) = 6$, d.h. G besitzt eine Zusammenhangskomponente, die so groß ist, wie die Anzahl an Knoten.
6. Ja! Wegen $\Delta(G) = 8$ besitzt $G = (V, E)$ eine Zusammenhangskomponente mit mindestens 9 Knoten. Wegen $\delta(G) = 2$ hat jede Zusammenhangskomponente mindestens 3 Knoten. Damit G aus mindestens zwei Zusammenhangskomponenten besteht, müsste $|V| \geq 9 + 3 = 12$ gelten, was nicht stimmt. Deswegen gilt die Implikation:

$$\Delta(G) + \delta(G) + 1 \geq |V| \implies G \text{ zusammenhängend.}$$

Themenübersicht

Wichtige Klassen von Graphen

Es gibt Graphen, die immer wieder vorkommen. Diese werden auf den nächsten Folien vorgestellt.

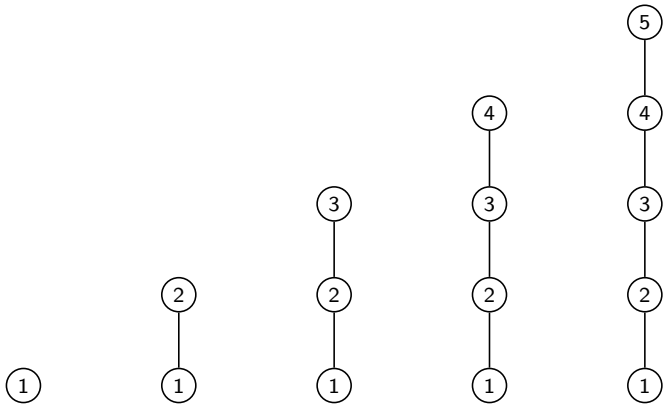
Pfade P_n

Sei $n \in \mathbb{N}$. Der Graph $G = (V, E)$ mit $V = [n]$ und

$$E = \left\{ \{u, v\} \in \binom{V}{2} \,\middle|\, v = u + 1 \right\}$$

heißt Pfad P_n.

Beispiele



Quizfrage

Wie viele Kanten besitzt P_n?

Antwort

Eine weniger als es Knoten gibt. D.h.:

$$|E| = n - 1.$$

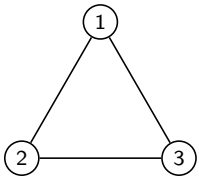
Kreise C_n

Sei $n \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl mit $n \geq 3$ und $V = \{v_0, \ldots, v_{n-1}\}$ eine beliebige n-elementige Menge. Der Graph $G = (V, E)$ mit

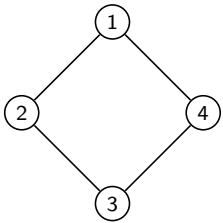
$$E = \left\{ \{v_i, v_j\} \in \binom{V}{2} \,\middle|\, j = (i+1) \bmod n \right\}$$

heißt Kreis C_n.

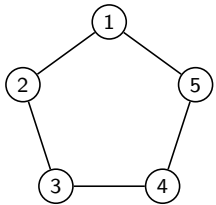
Beispiele



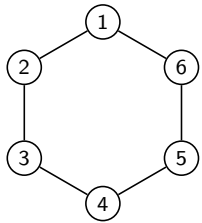
C_3



C_4



C_5



C_6

Quizfrage

Wie viele Kanten besitzt C_n?

Antwort

So viele, wie es Knoten gibt. D.h.:

$$|E| = n.$$

Vollständige Graphen K_n

Sei $n \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl und $V = \{v_0, \ldots, v_{n-1}\}$ eine beliebige n-elementige Menge. Der Graph $G = (V, E)$ mit

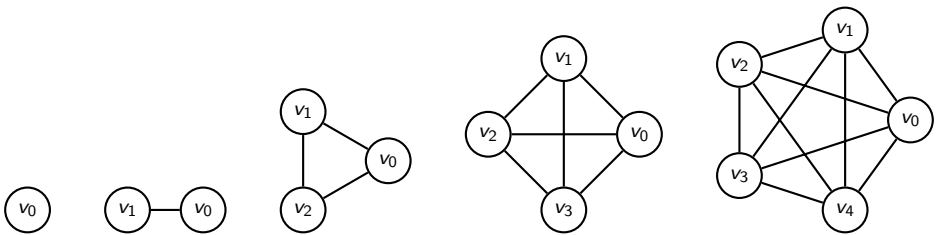
$$E = \binom{V}{2}$$

heißt vollständiger Graph K_n.

Info

In K_n ist also jeder Knoten mit jedem anderen durch eine Kante verbunden.

Beispiele



Quizfrage

Wie viele Kanten besitzt K_n?

Antwort

So viele, wie es Möglichkeiten gibt, 2 Knoten aus den n zu wählen. D.h.:

$$|E| = \left|\binom{V}{2}\right| = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Vollständige bipartite Graphen $K_{m,n}$

Seien $m, n \in \mathbb{N}$ natürliche Zahlen und $U = \{u_0, \ldots, u_{m-1}\}$ bzw. $V = \{v_0, \ldots, v_{n-1}\}$ beliebige m- bzw. n-elementige Mengen. Der bipartite Graph $G = (U, V, E)$ mit

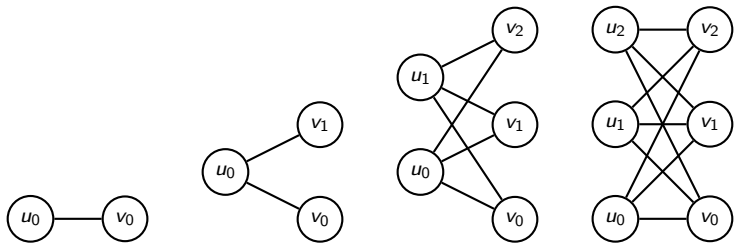
$$E = \left\{ \{v_i, v_j\} \in \binom{U \cup V}{2} \,\middle|\, v_i \in U \text{ und } v_j \in V \right\}$$

heißt vollständiger bipartiter Graph $K_{m,n}$.

Info

In $K_{m,n}$ ist also jeder Knoten aus U mit jedem aus V verbunden.

Beispiele



Quizfrage

Wie viele Kanten besitzt $K_{m,n}$?

Antwort

So viele, wie es Möglichkeiten gibt, jedes der m Knoten aus U mit jedem der n Knoten aus V zu verbinden. D.h.:

$$|E| = m \cdot n.$$

Gittergraphen $M_{m,n}$

Seien $m, n \in \mathbb{N}$ natürliche Zahlen und
$V = \{v_{i,j} \mid i \in \{0, \ldots, m-1 \text{ und } j \in \{0, \ldots, n-1\}\}$ eine beliebige $(n \cdot m)$-elementige Menge. Graph $G = (V, E)$ mit

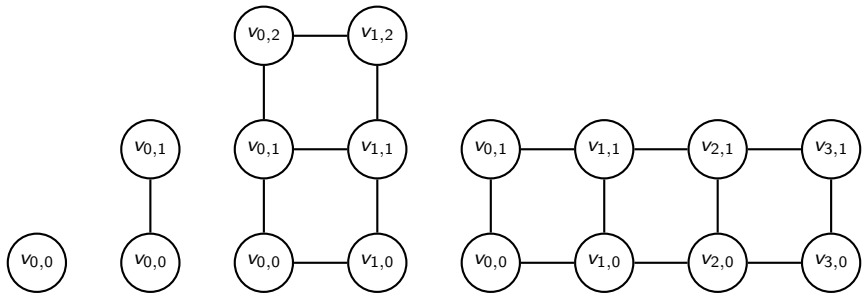
$$E = \left\{ \{v_{i,j}, v_{k,l}\} \in \binom{V}{2} \,\middle|\, |i-k| + |j-l| = 1 \right\}$$

heißt Gittergraph $M_{m,n}$.

Info

$v_{i,j}$ und $v_{k,l}$ sind also genau dann verbunden, wenn entweder i und k gleich sind und j und l sich um genau 1 unterscheiden oder j und l gleich sind und i und k sich um genau 1 unterscheiden.

Beispiele


$v_{0,0}$
$M_{1,1}$
$v_{0,1}$
$v_{0,0}$
$M_{1,2}$
$v_{0,2}$
$v_{1,2}$
$v_{0,1}$
$v_{1,1}$
$v_{0,0}$
$v_{1,0}$
$M_{2,3}$
$v_{0,1}$
$v_{1,1}$
$v_{2,1}$
$v_{3,1}$
$v_{0,0}$
$v_{1,0}$
$v_{2,0}$
$v_{3,0}$
$M_{4,2}$

Quizfrage

Wie viele Kanten besitzt $M_{m,n}$?

Antwort

Es gibt $n(m-1)$ „horizontale“ und $m(n-1)$ „vertikale“ Kanten. D.h.:

$$|E| = n(m-1) + m(n-1) = 2mn - m - n.$$

Alternativ: Es gibt

- 4 Knoten mit zwei Grad 2 (die Knoten an den Ecken),
- $2(m-2) + 2(n-2)$ Knoten mit Grad 3 (die Knoten an den Seiten) und
- $(m-2)(n-2)$ Knoten mit Grad 4 (die inneren Knoten).

Mit dem Handshaking-Theorem erhalten wir:

$$|E| = \frac{2 \cdot 4 + 3 \cdot (2(m-2) + 2(n-2)) + 4 \cdot (m-2)(n-2)}{2} = 2mn - m - n.$$

Binäre Hyperwürfel Q_n

Sei $n \in \mathbb{N}_0$ eine natürliche Zahl. Der Graph $G = (V, E)$ heißt n-dimensionaler binärer Hyperwürfel Q_n, falls $V = \{0,1\}^n$ und

$$E = \left\{ \{u, v\} \in \binom{V}{2} \,\middle|\, d(u, v) = 1 \right\}$$

gelten. Der Hamming-Abstand $d(u, v)$ von u und v gibt die Anzahl der Stellen an, an denen sich u und v unterscheiden.

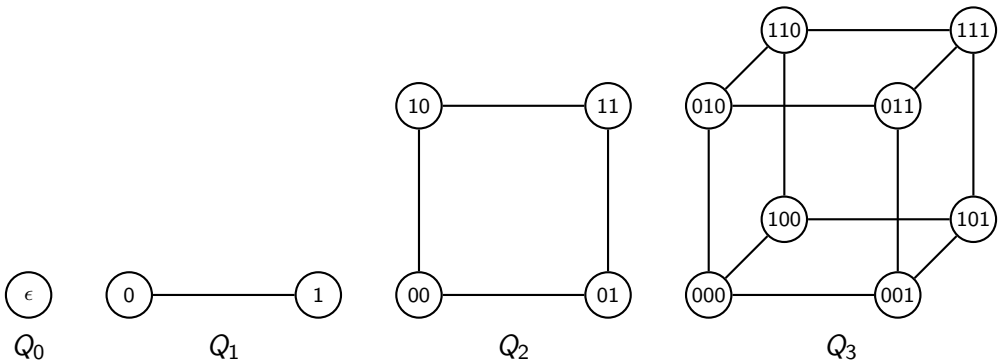
Info

Für Wörter $u = u_1 \dots u_n$ und $v = v_1 \dots v_n$ gilt:

$$d(u, v) = \sum_{i=1}^{n} |u_i - v_i|,$$

Beispiele: $d(0010, 0010) = 0$, $d(0011, 0110) = 2$ und $d(1011, 0100) = 4$.

Beispiele



Quizfrage

Wie viele Kanten besitzt Q_n?

Antwort

Es gibt 2^n Knoten und jeder Knoten hat genau Grad n. Mit dem Handshaking-Theorem erhält man:

$$|E| = \frac{n \cdot 2^n}{2} = n \cdot 2^{n-1}.$$

Überblick: Wichtige Klassen von Graphen

Hier ist eine kleine Zusammenfassung der Antworten der letzten Quizfragen:

Graph	Parameter	Name	Knoten	Kanten
P_n	$n \geq 1$	Pfad	n	$n-1$
C_n	$n \geq 3$	Kreis	n	n
K_n	$n \geq 1$	Vollständiger Graph	n	$\frac{n(n-1)}{2}$
$K_{m,n}$	$m, n \geq 1$	Vollständiger bipartiter Graph	$n+m$	nm
$M_{m,n}$	$m, n \geq 1$	Gittergraph	nm	$2nm-n-m$
Q_n	$n \geq 0$	Binärer Hyperwürfel	2^n	$n2^{n-1}$

Quizfragen

1. Für welche n und k ist P_n k-regulär?
2. Für welche n und k ist C_n k-regulär?
3. Für welche n und k ist K_n k-regulär?
4. Für welche m, n und k ist $K_{m,n}$ k-regulär?
5. Für welche m, n und k ist $M_{m,n}$ k-regulär?
6. Für welche n und k ist Q_n k-regulär?

Antworten

1. P_n ist 0-regulär für $n = 1$ und 1-regulär für $n = 2$. Für $n \geq 3$ ist P_n nicht k-regulär.
2. C_n ist 2-regulär für alle $n \geq 3$.
3. K_n ist $(n-1)$-regulär für alle $n \geq 1$.
4. $K_{m,n}$ ist genau dann k-regulär, falls $k = m = n$ gilt.
5. $M_{m,n}$ ist nur dann k-regulär, wenn $m, n \leq 2$ gilt. Für $m = n = 2$ ist $M_{m,n}$ 2-regulär und für $m = n = 1$ 0-regulär. Sonst ist $M_{m,n}$ 1-regulär.
6. Q_n ist n-regulär für alle $n \geq 0$.

Themenübersicht

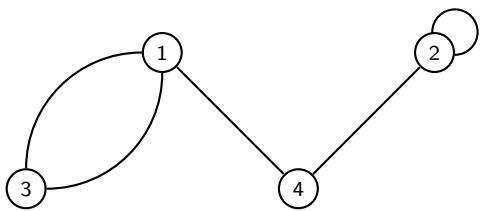
Verallgemeinerte Graphen

Ein verallgemeinerter Graph $G = (V, E)$ besteht aus einer Menge V von Knoten und einer Multimenge E von 2-elementigen Multimengen über V.

Man nennt solche Graphen auch Multigraphen.

Beispiel

$G = (V, E)$ mit $V = [4]$ und $E = \{\!|\{\!|1, 3|\!\}, \{\!|1, 3|\!\}, \{\!|1, 4|\!\}, \{\!|2, 2|\!\}, \{\!|2, 4|\!\}|\!\}$:



Infos

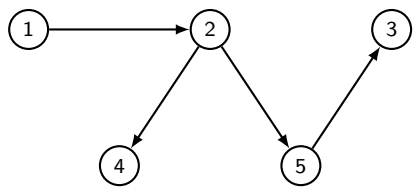
- Bei verallgemeinerten Graphen haben Kanten keine Richtung.
- Diesmal kann aber jede Kante beliebig oft vorkommen („Mehrfachkanten“).
- Auch Kanten von einem Knoten zu sich selbst („Schlingen“) sind erlaubt.

Gerichtete Graphen

Ein gerichteter Graph $G = (V, E)$ besteht aus einer Menge V von Knoten und einer Menge $E \subseteq V \times V$ von gerichteten Kanten.

Beispiel

$G = (V, E)$ mit $V = [5]$ und $E = \{(1, 2), (2, 4), (2, 5), (5, 3)\}$:



Info

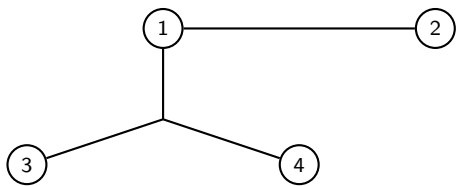
Bei gerichteten Graphen haben Kanten eine Richtung. Deswegen zeichnet man sie als Pfeile.

Hypergraphen

Ein Hypergraph $G = (V, E)$ besteht aus einer Menge V von Knoten und einer Menge $E \subseteq \mathcal{P}(V)$ von Hyperkanten.

Beispiel

$G = (V, E)$ mit $V = [4]$ und $E = \{\{1, 2\}, \{1, 3, 4\}\}$:



Infos

- Bei Hypergraphen haben Kanten keine Richtung.
- Eine Kante kann beliebig viele Knoten verbinden.

Quizfragen

1. Wie viele Kanten kann ein Graph mit n Knoten maximal haben?
2. Wie viele Kanten kann ein gerichteter Graph mit n Knoten maximal haben?
3. Wie viele verschiedene Kanten kann ein verallgemeinerter Graph mit n Knoten maximal haben?
4. Wie viele Kanten kann ein Hypergraph mit n Knoten maximal haben?

Antworten

1. So viele wie, es Möglichkeiten gibt, 2 aus n Elementen ohne Zurücklegen und ohne Beachtung der Reihenfolge zu ziehen, d.h.: $\binom{n}{2} = \frac{n \cdot (n-1)}{2}$.
2. So viele wie, es Möglichkeiten gibt, 2 aus n Elementen mit Zurücklegen und mit Beachtung der Reihenfolge zu ziehen, d.h.: n^2.
3. So viele wie, es Möglichkeiten gibt, 2 aus n Elementen mit Zurücklegen und ohne Betrachtung der Reihenfolge zu ziehen, d.h.: $\binom{2+n-1}{2} = \binom{n+1}{2} = \frac{(n+1) \cdot n}{2}$.
4. So viele wie, es Teilmengen von V gibt, d.h.: 2^n.

Wichtig!

Es gibt keine Beziehung zwischen Graphen, gerichteten Graphen und Hypergraphen. Graphen sind zwar ein Spezialfall von verallgemeinerten Graphen, aber weder ein Spezialfall noch eine Verallgemeinerung von gerichteten Graphen oder Hypergraphen. Die letzten zwei stehen auch untereinander in keiner Beziehung.

Die Definitionen und Aussagen bis Folie 812 beziehen sich nur auf normale (bzw. „ungerichtete“ oder „einfache“) Graphen!

Für die gerichtete Graphen, verallgemeinerte Graphen und Hypergraphen müssten sie angepasst werden. Das wurde aber, soweit ich weiß, nicht in der Vorlesung gemacht :-)

Themenübersicht

Themenübersicht

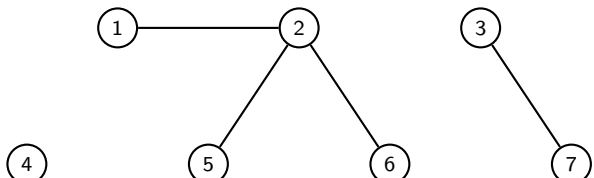
Wälder und Bäume

Sei $G = (V, E)$ ein Graph.

- G heißt Wald, falls er kreisfrei ist.
- G heißt Baum, falls er kreisfrei und zusammenhängend ist.
- Bei Bäumen und Wäldern heißen Knoten mit Grad 1 Blätter.

Beispiel

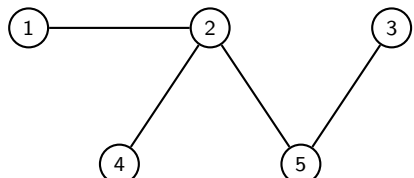
Sei $G = (V, E)$ folgender Graph:



G ist ein Wald, aber kein Baum. Die Blätter sind $1, 3, 5, 6, 7$.

Noch ein Beispiel

Sei $G = (V, E)$ folgender Graph:



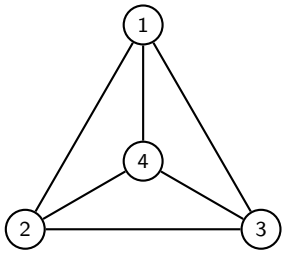
G ist ein Baum mit Blättern $1, 3, 4$.

Spannbäume

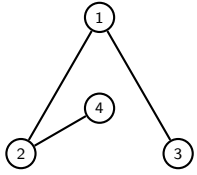
Ein Teilgraph $T = (V', E')$ von $G = (V, E)$ heißt Spannbaum von G, falls T ein Baum ist und $V' = V$ gilt.

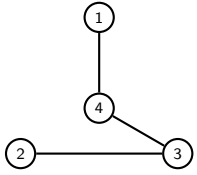
Beispiel

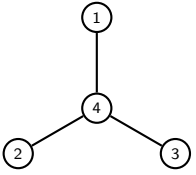
Sei $G = (V, E)$ folgender Graph:

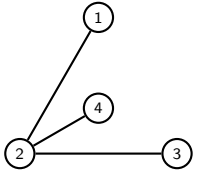


Einige Spannbäume von G sind:









Wichtige Aussagen zu Bäumen und Wäldern

1. Für jeden Graph $G = (V, E)$ gilt:

   G zshgd. $\iff$ Je zwei Knoten sind in G durch mindestens einen Pfad verbunden
   G kreisfrei $\iff$ Je zwei Knoten sind in G durch höchstens einen Pfad verbunden

2. Charakterisierung von Bäumen. Für jeden Graph $G = (V, E)$ gilt:

   G ist ein Baum $\iff$ G ist kreisfrei und zusammenhängend
   $\iff$ G ist zusammenhängend und es gilt $|V| = |E| + 1$
   $\iff$ G ist kreisfrei und es gilt $|V| = |E| + 1$
   $\iff$ Je zwei Knoten sind in G durch genau einen Pfad verbunden

3. Aus 2. folgt für jeden Graph $G = (V, E)$:

$$\begin{array}{lcl} G \text{ Baum} & \Longrightarrow & G \text{ kreisfrei} \\ G \text{ Baum} & \Longrightarrow & G \text{ zusammenhängend} \\ G \text{ Baum} & \Longrightarrow & |V| = |E| + 1 \end{array}$$

4. Ist $T = (V, E)$ ein Baum mit $|V| \geq 2$ Knoten und $v \in V$ ein Blatt, so ist der durch $V \setminus \{v\}$ induzierte Graph ebenfalls ein Baum.
5. Jeder zusammenhängende Graph $G = (V, E)$ enthält mindestens einen Spannbaum.
6. Satz von Cayley. Es gibt genau n^{n-2} Bäume mit n Knoten.

Achtung!

Folgender logischer Schluss ist falsch:

Für jeden Graph $G = (V, E)$ gelten folgende Äquivalenzen:

$$\begin{array}{lcl} G \text{ Baum} & \Longleftrightarrow & G \text{ zusammenhängend und kreisfrei} \\ G \text{ Baum} & \Longleftrightarrow & G \text{ zusammenhängend und } |V| = |E| + 1 \end{array}$$

Daraus folgt:

$$G \text{ kreisfrei} \iff |V| = |E| + 1 \ .$$

Die letzte Äquivalenz gilt nur, falls G zusammenhängend ist!

Übrigens: Jeder Baum besitzt alle drei Eigenschaften kreisfrei, zusammenhängend und $|V| = |E| + 1$. Es reicht aber nur zwei davon zu beweisen, dann folgt die dritte automatisch. Von diesen drei Eigenschaften kann ein Graph also entweder keine, genau eine oder alle drei besitzen, aber niemals genau zwei.

Quizfrage

Sei $G = (V, E)$ ein Wald mit n Knoten und genau k Komponenten. Wie viele Kanten enthält G?

Antwort

Jede der k Komponenten von G kann als Baum $G_i = (V_i, E_i)$ für $i = 1, \ldots, k$ betrachtet werden. Für jeden dieser Bäume gilt: $|V_i| = |E_i| + 1$. Daraus folgt:

$$\begin{aligned} |E| &= |E_1| + \ldots + |E_k| \\ &= (|V_1| - 1) + \ldots + (|V_k| - 1) \\ &= |V_1| + \ldots + |V_k| - k \\ &= |V| - k \\ &= n - k. \end{aligned}$$

Ein Wald mit n Knoten und k Komponenten hat $n - k$ Kanten.

Themenübersicht

Prüfer-Code

Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$. Der Prüfer-Code c zu einem Baum $T = ([n], E)$ ist ein $(n-2)$-Tupel

$$c = (c_1, c_2, \ldots, c_{n-2})$$

mit $c_1, c_2, \ldots, c_{n-2} \in [n]$. Dabei gilt:

- Jeder Baum lässt sich durch genau einen Prüfer-Code darstellen.
- Jeder Prüfer-Code stellt genau einen Baum dar.

Rezept

Frage: Wie kodiert und dekodiert man Bäume mit dem Prüfer-Code?
Methoden:

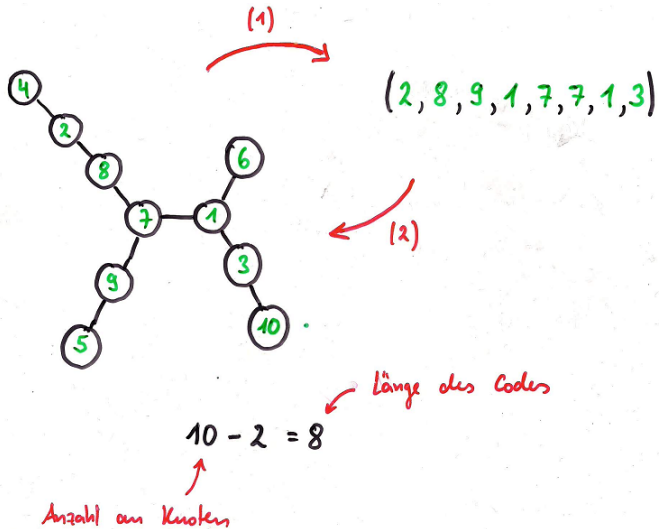
(1) Von Baum zu Code:

1. Solange der Baum mehr als 2 Knoten hat, wiederhole:
2. Entferne das kleinste Blatt vom Baum und füge seinen einzigen Nachbarn in den Code hinzu;
3. Die letzten zwei Knoten einfach ignorieren;

(2) Von Code zu Baum:

1. Starte die Zeichnung mit allen Knoten die nicht im Code vorkommen;
2. Gehe den Code $c = (c_1, c_2, \ldots, c_{n-2})$ von links nach rechts durch und für jeden Eintrag c_i wiederhole:
3. Von den von c_i verschiedenen, noch unmarkierten Knoten im Baum, die nicht mehr im restlichen Code vorkommen, nimm den kleinsten, markiere ihn und verbinde ihn mit c_i;
4. Verbinde die letzten 2 unmarkierten Knoten miteinander;

Beispiel


(1)
(2, 8, 9, 1, 7, 7, 1, 3)
(2)
4
2
8
7
9
5
6
1
3
10
Länge des Codes
10 - 2 = 8
Anzahl an Knoten

Infos

- Diese Methode stellt eine Bijektion zwischen der Menge aller Bäume mit n Knoten und der Menge

$$[n]^{n-2} = \underbrace{[n] \times [n] \times \ldots \times [n]}_{(n-2) \text{ mal}}$$

  aller $(n-2)$-Tupel über $[n]$ dar.
- Daraus folgt der Satz von Cayley aus Folie 833.
- Prüfer-Codes prüfen nichts. Sie wurden von Heinz Prüfer entwickelt! ;-)

Quizfragen

Gegeben seien folgende Bäume T_1, T_2 und T_3:

1. $T_1 = ([6], \{\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\},\{1,5\},\{2,6\}\})$,
2. $T_2 = ([6], \{\{1,3\},\{1,6\},\{2,6\},\{3,4\},\{5,6\}\})$,
3. $T_3 = ([6], \{\{1,2\},\{2,4\},\{2,5\},\{3,4\},\{5,6\}\})$.

Wie sieht der entsprechende Prüfer-Code c_i zu jedem Baum T_i aus?

Antworten

1. $c_1 = (1, 1, 1, 2)$.
2. $c_2 = (6, 3, 1, 6)$.
3. $c_3 = (2, 4, 2, 5)$.

Quizfragen

Gegeben seien folgende Prüfer-Codes c_1, c_2 und c_3:

1. $c_1 = (1, 3, 3, 1)$,
2. $c_2 = (6, 4, 2, 5)$,
3. $c_3 = (1, 1, 1, 1)$.

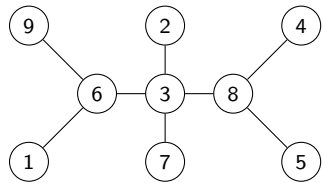
Wie sieht der entsprechende Baum T_i zu jedem Prüfer-Code c_i aus?

Antworten

1. $T_1 = ([6], \{\{1,2\},\{1,3\},\{1,6\},\{3,4\},\{3,5\}\})$.
2. $T_2 = ([6], \{\{1,6\},\{2,4\},\{2,5\},\{3,4\},\{5,6\}\})$.
3. $T_3 = ([6], \{\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\},\{1,5\},\{1,6\}\})$.

Bemerkung: In der Regel wird nicht erwartet, dass man Graphen als Tupel (V, E) darstellt. Eine Zeichnung reicht hier und in den meisten Fällen völlig aus :-)

1. Was ist der Prüfer-Code c_1 zu folgendem Baum T_1?



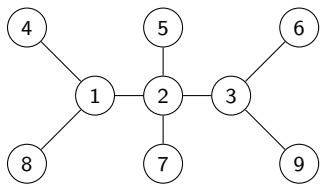
T_1

2. Wie sieht der Baum T_2 zu folgendem Prüfer-Code c_2 graphisch aus?

$$c_2 = (1, 2, 3, 2, 1, 2, 3)$$

3. Was stellt man fest, wenn man die Bäume und Prüfer-Codes der letzten zwei Fragen miteinander vergleicht?

Antworten

1. $c_1 = (6, 3, 8, 8, 3, 3, 6)$.
2. 

T_2
3. Dass man die Namen der Knoten im Baum vertauscht, heißt nicht, dass man einfach die Namen der Komponenten im Code entsprechend vertauschen kann.

Wichtig!

Weil das Thema Wurzelbäume bisher für die Übungsaufgaben irrelevant war, ist es auf diesen Folien nicht zu finden. Ihr findet es auf den Seiten 23-30 in den Vorlesungsfolien zum Thema Bäume.

Themenübersicht

Themenübersicht

Euler-Touren

Sei $G = (V, E)$ ein Graph.

- Eine Tour ist eine nichtleere Folge $(v_0, v_1, v_2, \ldots, v_k)$ von Knoten mit

$$\{v_0, v_1\}, \{v_1, v_2\}, \ldots, \{v_{k-1}, v_k\} \in E$$

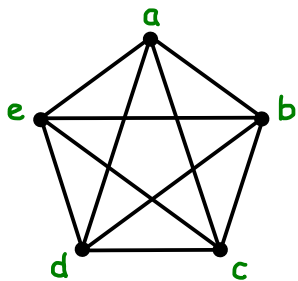
  und $v_0 = v_k$.
- Eine Tour in G, bei der jede Kante genau einmal benutzt wird, heißt Euler-Tour.
- Falls G eine Euler-Tour besitzt, dann heißt er eulersch.

Info

Touren sind Verallgemeinerungen von Kreisen bei denen die Knoten $v_0, \ldots, v_{k-1}$ nicht notwendigerweise verschieden sein müssen.

Beispiel

Der folgende Graph ist eulersch:



Eine mögliche Euler-Tour ist $(a, b, c, d, e, a, c, e, b, d, a)$.

Wichtige Aussage zu Euler-Touren

Satz von Euler. Ein Graph Graph $G = (V, E)$ ist genau dann eulersch, wenn er zusammenhängend ist und alle Knoten in ihm geraden Grad haben. D.h.:

$$G \text{ eulersch} \iff G \text{ zusammenhängend und } \forall v \in V : \deg(v) \text{ gerade } .$$

Info

Dieser Satz ist sowohl eine notwendige, als eine hinreichende Bedingung für Euler-Touren.

Quizfragen

1. Gibt es einen eulerschen Graph G mit Gradfolge $(2, 2, 3, 3, 4, 4)$?
2. Gibt es einen eulerschen Graph G mit Gradfolge $(2, 2, 2, 2, 2, 2)$?
3. Ist jeder Graph G mit Gradfolge $(2, 2, 2, 2, 2, 2)$ eulersch?

Antworten

1. Nein! G besitzt Knoten mit Grad 3 (ungerade).
2. Ja! Ein Kreis mit 6 Knoten, d.h. der C_6.
3. Nein! Es gibt auch nicht-zusammenhängende Graphen mit Gradfolge $(2, 2, 2, 2, 2, 2)$, z.B. zwei Kreise mit jeweils 3 Knoten.

Quizfragen

1. Für welche n ist P_n eulersch?
2. Für welche n ist C_n eulersch?
3. Für welche n ist K_n eulersch?
4. Für welche m und n ist $K_{m,n}$ eulersch?
5. Für welche m und n ist $M_{m,n}$ eulersch?
6. Für welche n ist Q_n eulersch?

Antworten

Info: Alle 6 Graphen sind zusammenhängend. Es muss also nur überprüft werden, ob jeder Knoten einen geraden Grad besitzt.

1. P_n ist nur für $n = 1$ eulersch, weil er sonst mindestens einen Knoten mit Grad 1 besitzt.
2. C_n ist für alle $n \geq 3$ eulersch, da alle Knoten Grad 2 haben.
3. Jeder Knoten in K_n hat Grad $n - 1$. K_n ist also genau dann eulersch, wenn n ungerade ist.
4. Die Knoten in $K_{m,n}$ haben Grad n oder m. $K_{m,n}$ ist also genau dann eulersch, wenn m und n gerade sind.
5. $M_{m,n}$ ist nur für $m = n = 1$ oder $m = n = 2$ eulersch, sonst gibt es Knoten mit Grad 1 oder 3.
6. Jeder Knoten in Q_n hat Grad n. Q_n ist also genau dann eulersch, wenn n gerade ist.

Themenübersicht

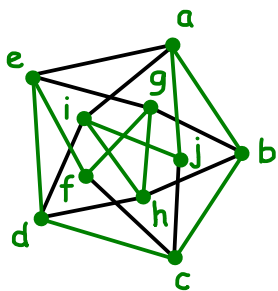
Hamilton-Kreise

Sei $G = (V, E)$ ein Graph.

- Ein Kreis in G, bei dem jeder Knoten genau einmal besucht wird, heißt Hamilton-Kreis.
- Falls G einen Hamilton-Kreis besitzt, dann heißt er hamiltonsch.

Beispiel

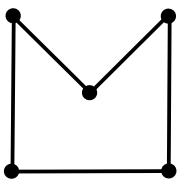
Der folgende Graph ist hamiltonsch:



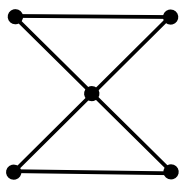
Ein möglicher Hamilton-Kreis ist $(a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, a)$.

Quizfrage

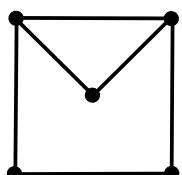
Gegeben seien folgende Graphen:



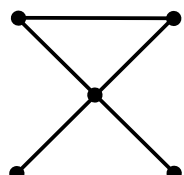
G_1



G_2



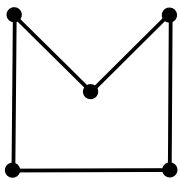
G_3



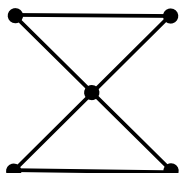
G_4

Welche davon sind eulersch und welche hamiltonsch?

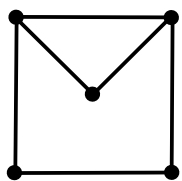
Antworten



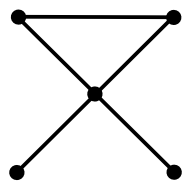
eulersch ✓
hamiltonsch ✓



eulersch ✓
hamiltonsch ✗



eulersch ✗
hamiltonsch ✓



eulersch ✗
hamiltonsch ✗

Wichtige Aussagen zu Hamilton-Kreisen

1. Kriterium von Ore. Jeder zusammenhängende Graph $G = (V, E)$ mit $|V| \geq 3$, bei dem die Summe der Grade je zwei nicht-benachbarter Knoten mindestens $|V|$ ist, ist hamiltonsch.
2. Für jeden Graph $G = (V, E)$ gilt:

$$\begin{array}{lll} \delta(G) \geq \frac{|V|}{2} & \Longrightarrow & G \text{ hamiltonsch} \quad \text{(folgt aus 1.)} \\ G \text{ hamiltonsch} & \Longrightarrow & \forall v \in V : \deg(v) \geq 2 \quad \text{(ist logisch ;-))} \end{array}$$

3. Für jeden bipartiten Graph $G = (V_1, V_2, E)$ gilt:

$$G \text{ hamiltonsch} \quad \Longrightarrow \quad |V_1| = |V_2| \quad \text{(folgt aus TA 11.2)}$$

Info

Das Kriterium von Ore ist, im Gegensatz zum Satz von Euler, nur eine hinreichende Bedingung. Ein Graph kann insbesondere hamiltonsch sein, ohne diese Bedingung zu erfüllen!

Quizfragen

1. Für welche n ist P_n hamiltonsch?
2. Für welche n ist C_n hamiltonsch?
3. Für welche n ist K_n hamiltonsch?
4. Für welche m und n ist $K_{m,n}$ hamiltonsch?

Antworten

1. P_n ist nur für $n = 1$ hamiltonsch.
2. C_n ist für alle $n \geq 3$ hamiltonsch.
3. K_n ist für alle $n \geq 1$ hamiltonsch (jede Anordnung $(v_1, \ldots, v_n)$ der Knoten ist ein Hamilton-Kreis).
4. $K_{m,n}$ ist nur für $m, n \geq 2$ und $m = n$ hamiltonsch. Dass $K_{m,n}$ für $m \leq 1$, $n \leq 1$ oder $m \neq n$ nicht hamiltonsch sein kann, erkennt man leicht. Für $n \geq 2$ enthält $K_{n,n}$ genau $2n$ Knoten mit jeweils Grad n. Somit ist die Summe der Grade zweier beliebiegen Knoten mindestens $2n$ und der Graph ist nach dem Kriterium von Ore hamiltonsch.

Themenübersicht

Themenübersicht

Planarität von Graphen

Ein Graph ist planar bzw. eben, falls man ihn auf einer Ebene zeichnen kann, so dass sich keine Kanten überschneiden.

Info

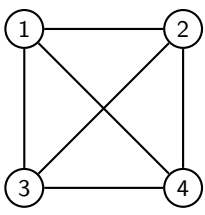
Man darf Knoten beliebig positionieren und Kanten verbiegen!

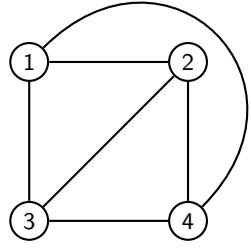
Rezept

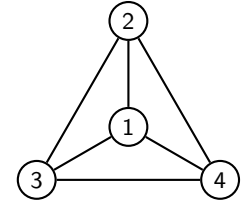
Frage: Wie zeigt man, dass ein Graph planar ist?
Methode: Durch eine schöne Zeichnung :-)

Beispiel

Der folgende Graph ist planar.

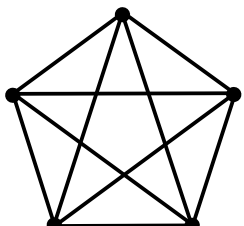




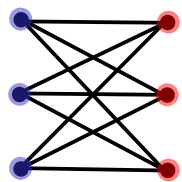


Satz von Kuratowski

- Ein Graph ist genau dann nicht planar, wenn er einen Teilgraph H besitzt, der eine Unterteilung des K_5 oder des $K_{3,3}$ ist.



K_5



$K_{3,3}$

- Eine *Unterteilung* eines Graphen G ist ein Graph, der dadurch entsteht, in dem Kanten von G durch Pfade ersetzt werden.

Infos

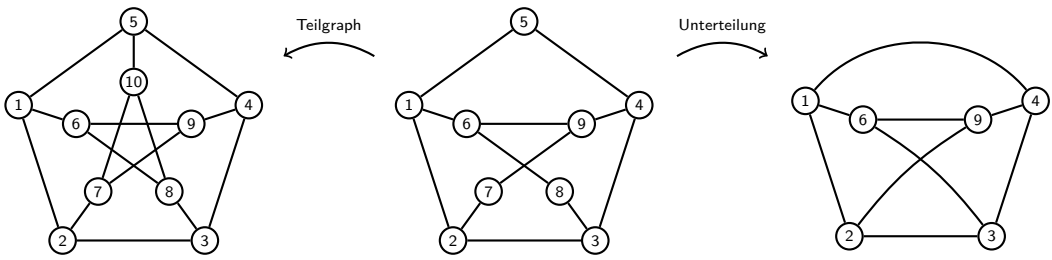
- Jeder Graph ist ein Teilgraph von sich selbst.
- Jeder Graph ist eine Unterteilung von sich selbst.

Rezept

Frage: Wie zeigt man, dass ein Graph G nicht planar ist?
Methode: Man findet einen Teilgraph H von G, der eine Unterteilung des K_5 oder des $K_{3,3}$ ist. (Der Graph H kann auch genau K_5 oder $K_{3,3}$ sein.)

Beispiel

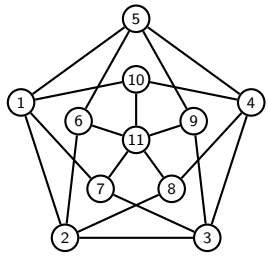
Der folgende Graph G ist nicht planar, weil er einen Teilgraph H besitzt, der eine Unterteilung des $K_{3,3}$ ist.



Die Partitionsklassen des $K_{3,3}$ sind hier $\{1, 3, 9\}$ und $\{2, 4, 6\}$.

Quizfrage

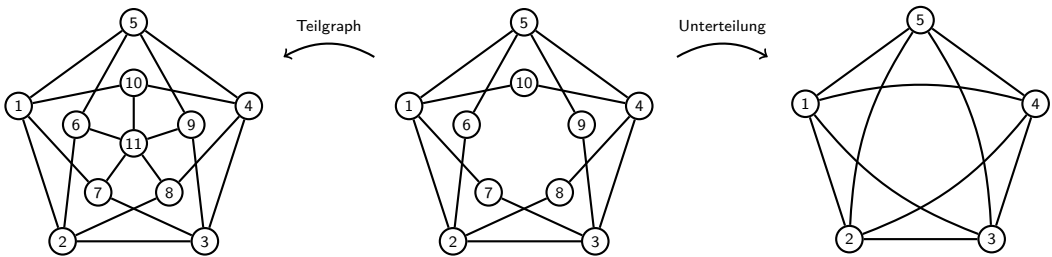
Ist der folgende Graph G planar?



G

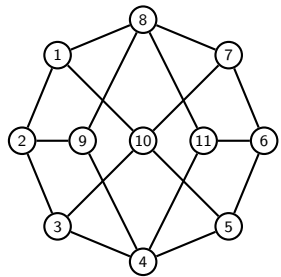
Antwort

Der Graph G ist nicht planar, weil er einen Teilgraph H besitzt, der eine Unterteilung des K_5 ist.



Quizfrage

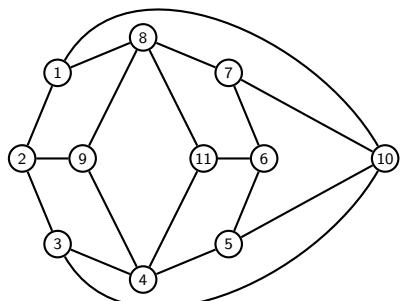
Ist der folgende Graph G planar?



G

Antwort

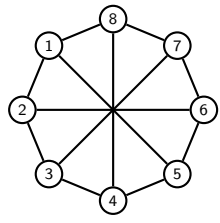
G ist planar, weil man den mittleren Knoten auch woanders zeichnen kann.



G

Quizfrage

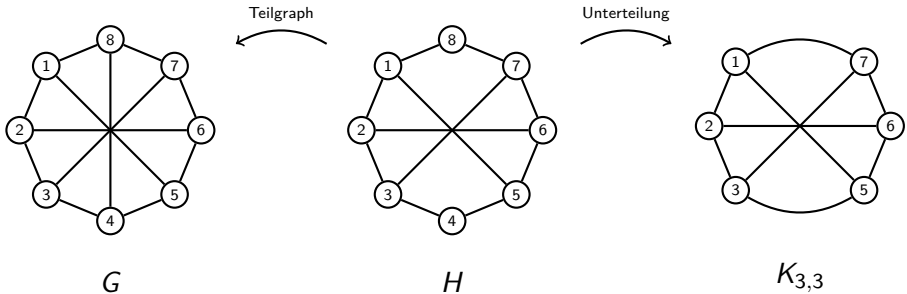
Ist der folgende Graph G planar?



G

Antwort

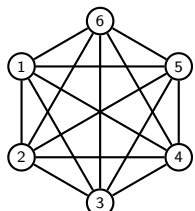
Der Graph G ist nicht planar, weil er einen Teilgraph H besitzt, der eine Unterteilung des $K_{3,3}$ ist.



Die Partitionsklassen des $K_{3,3}$ sind h $\{1, 3, 6\}$ und $\{2, 5, 7\}$.

Quizfrage

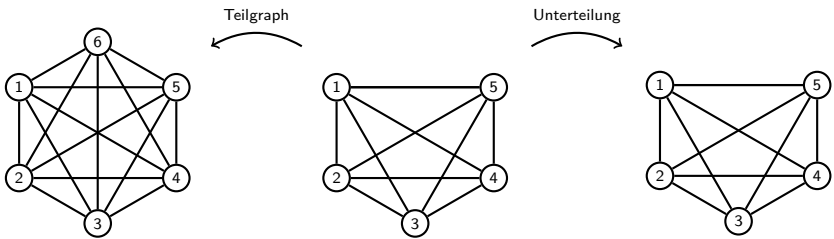
Ist der folgende Graph G planar?



G

Antwort

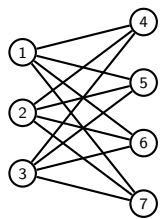
Der Graph G ist nicht planar, weil er einen Teilgraph H besitzt, der eine Unterteilung des K_5 ist.



In diesem Fall sind H und K_5 gleich.

Quizfrage

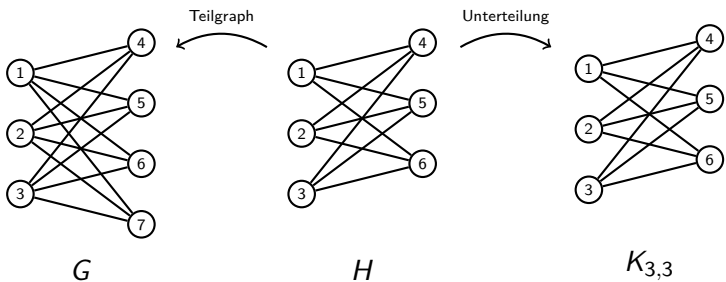
Ist der folgende Graph G planar?



G

Antwort

Der Graph G ist nicht planar, weil er einen Teilgraph H besitzt, der eine Unterteilung des $K_{3,3}$ ist.



In diesem Fall sind H und $K_{3,3}$ gleich. Die Partitionsklassen des $K_{3,3}$ sind hier $\{1, 2, 3\}$ und $\{4, 5, 6\}$.

Eulersche Polyederformel

Sei $G = (V, E)$ ein planarer Graph.

- Falls G zusammenhängend ist, dann gilt:

$$|R| = |E| - |V| + 2 \ .$$

- Falls G genau k Zusammenhangskomponenten besitzt, dann folgt daraus:

$$|R| = |E| - |V| + k + 1 \ .$$

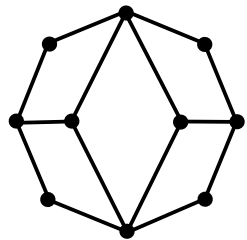
R ist die Menge aller Gebiete (engl. *regions*).

Info

Ein Gebiet ist einfach ein Stück Zeichenfläche, das von Kanten eingeschlossen wird. Das „äußere“ Gebiet zählt auch mit!

Beispiel

Sei G wieder folgender Graph:



Für die Anzahl $|R|$ der Gebiete in G gilt:

$$|R| = |E| - |V| + 2 = 14 - 10 + 2 = 6.$$

Wichtige Aussagen zur Planarität von Graphen

1. Eulersche Polyederformel. Für die Anzahl $|R|$ der Gebiete eines zusammenhängenden planaren Graphen $G = (V, E)$ gilt:

$$|R| = |E| - |V| + 2.$$

2. Für jeden Graph $G = (V, E)$:

$$\begin{array}{lcll} G \text{ planar} & \Longrightarrow & |E| \leq 3 \cdot |V| - 6 & (\text{falls } |V| \geq 3) \\ G \text{ planar} & \Longrightarrow & \exists v \in V : \deg(v) \leq 5 & \\ G \text{ kreisfrei} & \Longrightarrow & G \text{ planar} & \end{array}$$

3. Satz von Kuratowski. Ein Graph $G = (V, E)$ ist genau dann nicht planar, wenn er einen Teilgraph besitzt, der eine Unterteilung von K_5 oder $K_{3,3}$ ist. Daraus folgt:

$$\underbrace{|\{v \in V \,|\, \deg(v) \geq 4\}|}_{\substack{\text{Anzahl der Knoten} \\ \text{mit mindestens Grad 4}}} < 5 \text{ und } \underbrace{|\{v \in V \,|\, \deg(v) \geq 3\}|}_{\substack{\text{Anzahl der Knoten} \\ \text{mit mindestens Grad 3}}} < 6 \implies G \text{ planar}$$

Quizfragen

1. Gibt es einen planaren Graph G mit Gradfolge $(6, 6, 6, 6, 6, 6, 7, 7, 8, 8, 8)$?
2. Gibt es einen nicht-planaren Graph G mit Gradfolge $(1, 2, 2, 2, 3, 4, 4, 4, 4)$?
3. Wie viele Gebiete besitzt ein planarer Graph $G = (V, E)$ mit k Zusammenhangskomponenten in Abhängigkeit von $|V|$, $|E|$ und k?

1. Nein! Kein Knoten v hat Grad $\deg(v) \leq 5$ bzw. es gilt:
   $|E| = 37 > 27 = 3 \cdot |V| - 6$.
2. Nein! Damit G einen Teilgraph enthält, der eine Unterteilung von K_5 oder $K_{3,3}$ sollte er mindestens 5 Knoten mit mindestens Grad 4 oder mindestens 6 Knoten mit mindestens Grad 3. Dies ist nicht der Fall.
3. G besteht aus k planeren Graphen $G_i = (V_i, E_i)$ mit $|R_i|$ Gebieten für $i = 1, \ldots, k$. Das „äußere Gebiet“ ist das einzige Gebiet, was sie alle gemeinsam haben. Daraus folgt:

$$\begin{aligned}
|R| &= (|R_1| - 1) + \ldots + (|R_k| - 1) + 1 \\
&= |R_1| + \ldots + |R_k| - k + 1 \\
&= (|E_1| - |V_1| + 2) + \ldots + (|E_k| - |V_k| + 2) - k + 1 \\
&= |E_1| + \ldots + |E_k| - |V_1| - \ldots - |V_k| + 2k - k + 1 \\
&= |E| - |V| + k + 1.
\end{aligned}$$

Quizfragen

1. Für welche n ist P_n planar?
2. Für welche n ist C_n planar?
3. Für welche n ist K_n planar?
4. Für welche m und n ist $K_{m,n}$ planar?
5. Für welche m und n ist $M_{m,n}$ planar?

Antworten

1. P_n ist für alle $n \geq 1$ planar.
2. C_n ist für alle $n \geq 3$ planar.
3. K_n ist nur für $n \leq 4$ planar.
4. $K_{m,n}$ ist nur für $m, n \leq 2$ planar.
5. $M_{m,n}$ ist für alle $m, n \geq 1$ planar.

Themenübersicht

Färbung von Graphen

Eine Knotenfärbung eines Graphen $G = (V, E)$ mit k Farben ist eine Abbildung $c : V \to [k]$, so dass keine benachbarte Knoten dieselbe Farbe haben. Es gilt also für alle Knoten $v_1, v_2 \in V$:

$$\{v_1, v_2\} \in E \implies c(v_1) \neq c(v_2).$$

Die chromatische Zahl $\chi(G)$ („*Chi* von G“) von G ist die minimale Anzahl an Farben, die für eine Knotenfärbung von G benötigt werden.

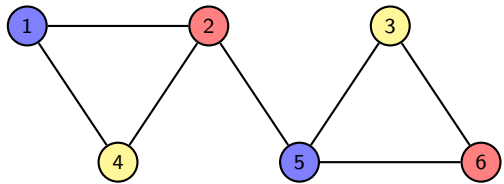
Infos

- Statt $\{\text{blau}, \text{rot}, \text{gelb}, \ldots\}$ ist unsere Farbpalette $[k] = \{1, \ldots, k\}$.
- Der Ausdruck $c(v)$ gibt die Farbe des Knotens v an.
- Der chromatische Index $\chi'(G)$ war bis 2005 Teil des DS-Stoffes. Er gibt die minimale Anzahl an Farben für eine Kantenfärbung von G an. In einer Kantenfärbung dürfen keine zwei benachbarten Kanten dieselbe Farbe haben, d.h. für alle $e_1, e_2 \in E$:

$$e_1 \cap e_2 \neq \emptyset \implies c(e_1) \neq c(e_2).$$

Beispiel

Sei $G = (V, E)$ wieder folgender Graph:



G kann wie folgt gefärbt werden:

$$c(1) = 1\ ,\ c(2) = 2\ ,\ c(3) = 3\ ,\ c(4) = 3\ ,\ c(5) = 1\ ,\ c(6) = 2.$$

Man könnte ihn auch mit 4, 5 oder 6 Farben färben. Weil aber G Dreiecke enthält, ist das mit weniger als 3 Farben unmöglich. Die chromatische Zahl von G ist also

$$\chi(G) = 3.$$

Quizfragen

1. Was ist $\chi(P_n)$ in Abhängigkeit von n?
2. Was ist $\chi(C_n)$ in Abhängigkeit von n?
3. Was ist $\chi(K_n)$ in Abhängigkeit von n?
4. Was ist $\chi(K_{m,n})$ in Abhängigkeit von m und n?
5. Was ist $\chi(M_{m,n})$ in Abhängigkeit von m und n?
6. Was ist $\chi(Q_n)$ in Abhängigkeit von n?

Antworten

1. $\chi(P_n) = \begin{cases} 1, & \text{falls } n = 1 \\ 2, & \text{sonst} \end{cases}$
2. $\chi(C_n) = \begin{cases} 2, & \text{falls } n \text{ gerade} \\ 3, & \text{sonst} \end{cases}$
3. $\chi(K_n) = n$.
4. $\chi(K_{m,n}) = 2$.
5. $\chi(M_{m,n}) = \begin{cases} 1, & \text{falls } n = 1 \text{ und } m = 1 \\ 2, & \text{sonst} \end{cases}$
6. $\chi(Q_n) = \begin{cases} 1, & \text{falls } n = 1 \\ 2, & \text{sonst} \end{cases}$

Wichtige Aussagen zur Färbbarkeit von Graphen

1. Für jeden Graph $G = (V, E)$ mit $|V| \geq k$ gilt:

$$G \text{ ist } k\text{-partit} \iff G \text{ ist } k\text{-färbbar} \iff \chi(G) \leq k \ .$$

2. Für jeden Graph $G = (V, E)$ gilt:

$$\begin{array}{lll} G \text{ planar} & \Longrightarrow & \chi(G) \leq 4 \quad \text{(Vier-Farben-Satz)} \\ G \text{ Baum} & \Longrightarrow & \chi(G) = 2 \quad \text{(falls } |V| \geq 2\text{)} \end{array}$$

3. Greedy-Färbung. Für jeden Graph G gilt:

$$\chi(G) \leq \Delta(G) + 1.$$

Themenübersicht

Matchings

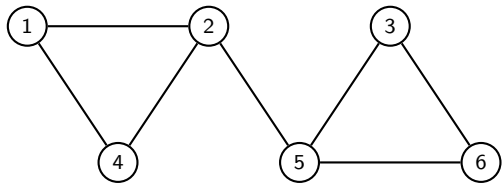
Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Ein Matching M ist eine Menge $M \subseteq E$ von paarweise disjunkten Kanten.

Ein Matching ist perfekt, falls jeder Knoten zu genau einer Kante von M gehört, d.h. falls gilt:

$$|M| = \frac{|V|}{2}.$$

Beispiel

Sei $G = (V, E)$ wieder folgender Graph:



- $M_1 = \{\{1,2\},\{2,5\},\{3,6\}\}$ ist kein Matching, weil die Kanten $\{1,2\}$ und $\{2,5\}$ nicht disjunkt sind.
- $M_2 = \{\{1,2\},\{5,6\}\}$ ist ein Matching, aber kein perfektes Matching, weil die Knoten 3 und 4 in M_2 nicht vorkommen.
- $M_3 = \{\{1,4\},\{2,5\},\{3,6\}\}$ ist ein perfektes Matching.

Heiratssatz von Hall

Für einen bipartiten Graphen $G = (V_1, V_2, E)$ gibt es genau dann ein Matching M der Kardinalität $|V_1|$, wenn gilt:

$$\forall X \subseteq V_1 : |\Gamma(X)| \geq |X|.$$

Hierbei ist $\Gamma(X)$ die Menge der Nachbarn aller Knoten aus X.

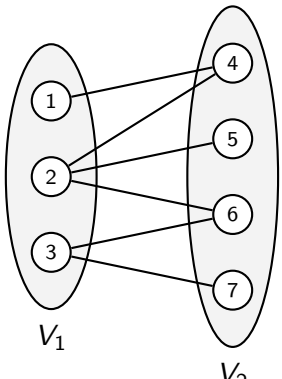
Info

Eine sehr sehr wichtige Folgerung von diesem Satz ist, dass jeder bipartite, k-reguläre Graph G ein perfektes Matching hat. D.h.:

$$G \text{ bipartit und } k\text{-regulär} \implies G \text{ hat perfektes Matching } .$$

Beispiel

Sei $G = (V_1, V_2, E)$ folgender bipartite Graph:



X	$\Gamma(X)$
$\{\}$	$\{\}$
$\{1\}$	$\{4\}$
$\{2\}$	$\{4,5,6\}$
$\{3\}$	$\{6,7\}$
$\{1,2\}$	$\{4,5,6\}$
$\{1,3\}$	$\{4,6,7\}$
$\{2,3\}$	$\{4,5,6,7\}$
$\{1,2,3\}$	$\{4,5,6,7\}$

Da für alle $X \subseteq V_1$ die Ungleichung $|X| \leq |\Gamma(X)|$ gilt, gibt es ein Matching M mit $|M| = |V_1| = 3$, z.B.:

$$M = \{\{1,4\},\{2,5\},\{3,6\}\}.$$

Wichtig!

Weil das Thema Stabile Heiraten sehr selten in Übungsaufgaben vorkommt, ist es auf diesen Folien nicht zu finden. Falls das Thema im aktuellen Semester relevant ist, solltet ihr euch unbedingt die Vorlesungsfolien dazu anschauen.

Wichtige Aussagen zu Matchings

1. Heiratssatz von Hall. Für einen bipartiten Graphen $G = (V_1, V_2, E)$ gibt es genau dann ein Matching M der Kardinalität $|V_1|$, wenn gilt:

$$\forall X \subseteq V_1 : |\Gamma(X)| \geq |X|.$$

2. Für jeden Graph $G = (V, E)$ gilt:

$$G \text{ hat perfektes Matching} \implies |V| \text{ ist gerade}$$

3. Für jeden bipartiten Graph $G = (V_1, V_2, E)$ gilt:

$$G \text{ ist } k\text{-regulär} \implies G \text{ hat perfektes Matching} \quad \text{(folgt aus 1.)}$$
$$G \text{ hat perfektes Matching} \implies |V_1| = |V_2|$$

Quizfragen

1. Für welche n besitzt P_n ein perfektes Matching?
2. Für welche n besitzt C_n ein perfektes Matching?
3. Für welche n besitzt K_n ein perfektes Matching?
4. Für welche m und n besitzt $K_{m,n}$ ein perfektes Matching?
5. Für welche m und n besitzt $M_{m,n}$ ein perfektes Matching?
6. Für welche n besitzt Q_n ein perfektes Matching?

Antworten

1. P_n besitzt genau dann ein perfektes Matching, wenn n gerade ist.
2. C_n besitzt genau dann ein perfektes Matching, wenn n gerade ist.
3. K_n besitzt genau dann ein perfektes Matching, wenn n gerade ist.
4. $K_{m,n}$ besitzt genau dann ein perfektes Matching, wenn $m = n$ gilt.
5. $M_{m,n}$ besitzt genau dann ein perfektes Matching, wenn m oder n gerade sind.
6. Q_n besitzt für alle $n \geq 1$ ein perfektes Matching.

Themenübersicht

Themenübersicht

Operatoren

- Ein Operator $\circ$ über einer Menge A mit Arität (oder Stelligkeit) n ist eine Funktion

$$\circ : A^n \to A.$$

- Eine Menge $B \subseteq A$ heißt in $\circ$ abgeschlossen, falls für alle $a_1, \ldots, a_n \in A$ gilt:

$$a_1, \ldots, a_n \in B \implies \circ(a_1, \ldots, a_n) \in B \ .$$

Beispiele

Folgende sind Operatoren über $\mathbb{R}$:

Operator	Symbol	Arität
Addition	$+$	2
Subtraktion	$-$	2
Multiplikation	$\cdot$	2
Maximum	max	2
Minimum	min	2
Negation	$-$	1

Die Division : ist ein Operator über $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ mit Stelligkeit 2. Sie ist kein Operator über $\mathbb{R}$, weil man durch Null nicht dividieren darf.

Mehr Beispiele

Für eine beliebige Menge A sind folgende Operatoren über $\mathcal{P}(A)$:

Operator	Symbol	Arität
Schnitt	$\cap$	2
Vereinigung	$\cup$	2
Differenz	$\setminus$	2
Symmetrische Differenz	$\triangle$	2
Komplement	$\overline{}$	1

$\mathcal{P}(B)$ ist für jede Menge $B \subseteq A$ in $\cap$, $\cup$, $\setminus$ und $\triangle$ abgeschlossen. Nur $\mathcal{P}(A)$ ist in $\overline{}$ abgeschlossen.

Quizfrage

Für eine beliebige Menge A ist die Komposition von Funktionen $\circ$ ein Operator mit Arität 2 über der Menge A^A aller Funktionen $f : A \to A$.

Welche interessanten Teilmengen von A^A sind in $\circ$ abgeschlossen?

Antwort

Einige coole Teilmengen von A^A, die in $\circ$ abgeschlossen sind, sind:

- die Menge aller injektiven Funktionen $f : A \to A$,
- die Menge aller surjektiven Funktionen $f : A \to A$,
- die Menge aller bijektiven Funktionen $f : A \to A$.

Erinnerung: Im Abschnitt „Beweismethoden“ haben wir bewiesen, dass die Komposition von zwei injektiven (bzw. surjektiven) Funktionen wieder injektiv (bzw. surjektiv) ist.

Infos

- Operatoren mit Stelligkeit 1 heißen unär, mit Stelligkeit 2 binär und mit Stelligkeit 3 ternär.
- Für unäre Operatoren $\circ$ schreiben wir oft $\overset{\circ}{a}$ (z.B. beim Komplement) oder $\circ a$ (z.B. bei der Negation).
- Für binäre Operatoren $\circ$ schreiben wir oft $a \circ b$. Man nennt diese Schreibweise Infixnotation.

Algebren

- Eine Algebra $(A, \circ_1, \ldots, \circ_n)$ besteht aus einer Trägermenge A und beliebig vielen Operatoren $\circ_1, \ldots, \circ_n$, so dass A in ihnen abgeschlossen ist.
- Eine Algebra $(A, \circ)$ mit einem binären Operator $\circ$ heißt kommutativ oder abelsch, falls $\circ$ kommutativ ist, d.h.:

$$\forall a, b \in A : a \circ b = b \circ a.$$

- $(B, \circ)$ heißt Unteralgebra von $(A, \circ)$, falls $B \subseteq A$ gilt und $(B, \circ)$ selber eine Algebra ist.

Infos

- A kann eine beliebige Menge sein und $\circ_1, \ldots, \circ_n$ beliebige Operatoren über diese Menge. Der Fantasie sind hier keine Grenzen gesetzt ;-)
- Das Symbol $\circ$ (oft auch $\bullet$, $*$, $\odot$ oder $\oplus$) ist nur ein Platzhalter für einen beliebigen Operator und nicht notwendigerweise das Relationenprodukt oder die Komposition von Funktionen!

Beispiele

Einige Algebren über Zahlen sind:

- $(\mathbb{Q}, +, -, \cdot, \min, \max)$,
- $(\mathbb{Z}, +, -, \cdot, \min, \max)$,
- $(\mathbb{N}_0, +, \cdot, \min, \max)$,
- $(\mathbb{N}, +, \cdot, \min, \max)$.

Für eine beliebige Menge M sind auch

- $(\mathcal{P}(M), \cap, \cup, \setminus, \triangle, \overline{\ })$ und
- $(M^M, \circ)$

Algebren

Gegenbeispiele

- $(\mathbb{Z}, :)$, $(\mathbb{N}, :)$ und $(\mathbb{N}_0, :)$ sind keine Algebren, da beispielsweise $1 : 2 = 0,5$ gilt und $0,5$ in keine der drei Mengen enthalten ist.
- $(\mathbb{Q}, :)$ist keine Algebra, da die Division durch 0 nicht definiert ist.
- $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, :)$ ist eine Algebra. $(\mathbb{Z} \setminus \{0\}, :)$ und $(\mathbb{N} \setminus \{0\}, :)$ dagegen nicht, da beispielsweise $1 : 2$ weder in $\mathbb{Z}$ noch in $\mathbb{N}$ enthalten ist.
- $(\mathbb{N}_0, -)$ und $(\mathbb{N}, -)$ sind keine Algebren, da beispielsweise $1 - 2$ keine natürliche Zahl ist.

Halbgruppen

Eine Algebra $(A, \circ)$ mit genau einem binären Operator $\circ : A \times A \to A$ heißt Halbgruppe, falls sie assoziativ ist, d.h. wenn gilt:

$$\forall a, b, c \in A : (a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c).$$

Beispiele

Aus den Algebren aus Folie 917 lassen sich folgende Halbgruppen gewinnen.

- Über Zahlenmengen:

$$\begin{array}{llll} (\mathbb{Q},+), & (\mathbb{Q},\cdot), & (\mathbb{Q},\min), & (\mathbb{Q},\max), \\ (\mathbb{Z},+), & (\mathbb{Z},\cdot), & (\mathbb{Z},\min), & (\mathbb{Z},\max), \\ (\mathbb{N}_0,+), & (\mathbb{N}_0,\cdot), & (\mathbb{N}_0,\min), & (\mathbb{N}_0,\max), \\ (\mathbb{N},+), & (\mathbb{N},\cdot), & (\mathbb{N},\min), & (\mathbb{N},\max). \end{array}$$

- Über einer beliebigen Menge M:

$$(\mathcal{P}(M),\cap), \quad (\mathcal{P}(M),\cup), \quad (\mathcal{P}(M),\triangle), \quad (M^M,\circ).$$

Alle hier aufgelisteten Halbgruppen sind, mit $(M^M,\circ)$ als einzige Ausnahme, kommutativ.

Gegenbeispiele

- $(\mathcal{P}(M), \overline{\ })$ ist für keine Menge M eine Halbgruppe, da das Komplement $\overline{\ }$ nicht binär ist.
- $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, :)$ ist keine Halbgruppe, da die Division $:$ nicht assoziativ ist. Es gilt beispielsweise:
$$(8 : 4) : 2 = 1 \neq 4 = 8 : (4 : 2).$$
- $(\mathbb{Z}, -)$ ist keine Halbgruppe, da die Subtraktion $-$ nicht assoziativ ist. Es gilt beispielsweise:
$$(5 - 3) - 2 = 0 \neq 4 = 5 - (3 - 2).$$
- $(\mathcal{P}(M), \setminus)$ ist nur für $M = \emptyset$ eine Halbgruppe. Für $|M| \geq 1$ ist die Differenz $\setminus$ nicht assoziativ. Beispielsweise gilt:
$$(\{1\} \setminus \emptyset) \setminus \{1\} = \emptyset \neq \{1\} = \{1\} \setminus (\emptyset \setminus \{1\}).$$

Quizfragen

Sei $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \,\middle|\, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N} \right\}$ die Menge aller rationalen Zahlen und $x \circ y$ der Mittelwert von x und y, d.h.:

$$x \circ y := \frac{x + y}{2}.$$

1. Ist $(\mathbb{Q}, \circ)$ eine Algebra?
2. Ist $(\mathbb{Q}, \circ)$ eine Halbgruppe?
3. Ist $(\mathbb{Q}, \circ)$ kommutativ?

Antworten

1. Ja! $\circ$ ist ein Operator über $\mathbb{Q}$, da der Mittelwert zweier Brüche wieder ein Bruch ist. Für beliebige $p, r \in \mathbb{Z}$ und $q, s \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\frac{p}{q} \circ \frac{r}{s} = \frac{\frac{p}{q} + \frac{r}{s}}{2} = \frac{ps + qr}{2qs}.$$

2. Nein! $\circ$ ist nicht assoziativ. Beispielsweise gilt:

$$(9 \circ 5) \circ 1 = 4 \neq 6 = 9 \circ (5 \circ 1).$$

3. Ja! $\circ$ ist kommutativ, da für alle $x, y \in \mathbb{Q}$ gilt:

$$x \circ y = \frac{x + y}{2} = \frac{y + x}{2} = y \circ x.$$

Monoide

Eine Halbgruppe $(A, \circ)$ heißt Monoid, falls sie ein Element $e \in A$ mit folgender Eigenschaft besitzt:

$$\forall a \in A : a \circ e = a = e \circ a.$$

Dieses Element wird neutrales Element genannt.

Infos

- Ein Element $e \in A$ heißt linksneutral, falls für alle $a \in A$ gilt: $e \circ a = a$ und rechtsneutral, falls für alle $a \in A$ gilt: $a \circ e = a$.
- Man nennt das neutrale Element e oft auch Einselement 1.
- Existiert ein neutrales Element e, dann kann man auch $(A, \circ, e)$ statt nur $(A, \circ)$ schreiben.
- Es gibt in A entweder nur linksneutrale Elemente, nur rechtsneutrale Elemente oder genau ein neutrales Element.

Beispiele

Folgende Halbgruppen aus aus Folie 920 sind Monoide.

- Mit neutralem Element 0:

$$(\mathbb{Q}, +), \quad (\mathbb{Z}, +), \quad (\mathbb{N}_0, +), \quad (\mathbb{N}_0, \max).$$

- Mit neutralem Element 1:

$$(\mathbb{Q}, \cdot), \quad (\mathbb{Z}, \cdot), \quad (\mathbb{N}_0, \cdot), \quad (\mathbb{N}, \cdot), \quad (\mathbb{N}, \max).$$

Alle hier aufgelisteten Monoide sind kommutativ.

Gegenbeispiele

Keine Monoide sind:

$$(\mathbb{Q}, \min), \quad (\mathbb{Z}, \min), \quad (\mathbb{N}_0, \min), \quad (\mathbb{N}, \min), \quad (\mathbb{Q}, \max), \quad (\mathbb{Z}, \max), \quad (\mathbb{N}, +).$$

Quizfragen

Sei A eine beliebige Menge. Was ist in folgenden Monoiden das neutrale Element?

1. $(\mathcal{P}(A), \cap)$,
2. $(\mathcal{P}(A), \cup)$,
3. $(\mathcal{P}(A), \triangle)$,
4. $(A^A, \circ)$.

Hinweise:

- Welche Mengen sind für jedes A in $\mathcal{P}(A)$ enthalten?
- Welche Funktion ist für jedes A in A^A enthalten?

Antworten

1. Das neutrale Element ist A, da für alle $X \in \mathcal{P}(A)$ gilt:

$$X \cap A = X = A \cap X.$$

2. Das neutrale Element ist $\emptyset$, da für alle $X \in \mathcal{P}(A)$ gilt:

$$X \cup \emptyset = X = \emptyset \cup X.$$

3. Das neutrale Element ist $\emptyset$, da für alle $X \in \mathcal{P}(A)$ gilt:

$$A \triangle \emptyset = A = \emptyset \triangle A.$$

4. Das neutrale Element ist die Identitätsfunktion id_A, da für alle Funktionen $f \in A^A$ und alle $x \in A$ gilt:

$$(f \circ \mathrm{id}_A)(x) = f(\mathrm{id}_A(x)) = f(x) = \mathrm{id}_A(f(x)) = (\mathrm{id}_A \circ f)(x).$$

Gruppen

Ein Monoid $(A, \circ)$ mit neutralem Element e heißt Gruppe, falls es für jedes Element $a \in A$ ein Element $a^{-1} \in A$ gibt mit:

$$a \circ a^{-1} = e = a^{-1} \circ a.$$

a^{-1} wird inverses Element von a genannt und kann in manchen Fällen a selbst sein.

Infos

- Ein Element $a^{-1} \in A$ heißt linksinvers zu $a \in A$, falls gilt: $a^{-1} \circ a = e$ und rechtsinvers, falls gilt: $a \circ a^{-1} = e$.
- Existiert ein neutrales Element e, dann kann man auch $(A, \circ, e)$ statt nur $(A, \circ)$ schreiben.
- a^{-1} ist nur eine Schreibweise und bedeutet nicht unbedingt $\frac{1}{a}$.
- Ein Element $a \in A$ besitzt entweder nur linksinverse Elemente, nur rechtsinverse Elemente oder genau ein inverses Element.

Beispiele

Die einzigen Monoide aus Folie 926, die Gruppen sind, sind:

$$(\mathbb{Q}, +) \quad \text{und} \quad (\mathbb{Z}, +).$$

Außerdem ist auch $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$ eine Gruppe. Alle drei Gruppen sind kommutativ.

Gegenbeispiele

- $(\mathbb{N}_0, +)$ und $(\mathbb{N}_0, \max)$ sind keine Gruppen, weil nur die 0 ein inverses Element besitzt (nämlich die 0 selber).
- $(\mathbb{N}_0, \cdot)$, $(\mathbb{N}, \cdot)$, $(\mathbb{N}, \max)$ und $(\mathbb{Z}, \cdot)$ sind keine Gruppen, weil nur die 1 ein inverses Element besitzt (nämlich die 1 selber).
- $(\mathbb{Q}, \cdot)$ ist keine Gruppe, weil die 0 kein inverses Element besitzt.

Philosophische Quizfrage

Ist $(\emptyset, \circ)$ mit dem leeren Operator $\circ : \emptyset \times \emptyset \to \emptyset$ eine Gruppe?

Antwort

Nö! Weil es keine Elemente gibt, gibt es insbesondere kein neutrales Element. Also ist $(\emptyset, \circ)$ zwar eine Halbgruppe, aber kein Monoid und somit auch keine Gruppe.

Info

Für jede Menge A und jeden binären Operator $\circ$ gilt:

1. A ist in $\circ$ abgeschlossen
   $\forall a, b \in A\colon a \circ b \in A$
2. Die Einschränkung von $\circ$ auf A ist assoziativ
   $\forall a, b, c \in A\colon (a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$
3. A besitzt ein neutrales Element bezüglich $\circ$
   $\exists e \in A\colon \forall a \in A\colon a \circ e = a = e \circ a$
4. Jedes Element aus A besitzt ein inverses Element bezüglich $\circ$
   $\forall a \in A\colon \exists a^{-1} \in A\colon a \circ a^{-1} = e = a^{-1} \circ a$

Algebra

Halbgruppe

Monoid

Gruppe

Daraus folgt folgende Hierarchie:

$$(A, \circ) \text{ Gruppe} \implies (A, \circ) \text{ Monoid} \implies (A, \circ) \text{ Halbgruppe} \implies (A, \circ) \text{ Algebra.}$$

Beispiele

Aus den letzen Beispielen ergibt sich folgende Hierarchie:

1. Gruppen sind:
$$(\mathbb{Q}, +), \quad (\mathbb{Z}, +), \quad (\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot).$$
2. Monoide, aber keine Gruppen sind:
$$(\mathbb{N}_0, +), \quad (\mathbb{N}_0, \max), \quad (\mathbb{N}_0, \cdot), \quad (\mathbb{N}, \cdot), \quad (\mathbb{N}, \max), \quad (\mathbb{Z}, \cdot), \quad (\mathbb{Q}, \cdot).$$
3. Halbgruppen, aber keine Monoide sind:
$$(\mathbb{Q}, \min), \quad (\mathbb{Z}, \min), \quad (\mathbb{N}_0, \min), \quad (\mathbb{N}, \min), \quad (\mathbb{Q}, \max), \quad (\mathbb{Z}, \max), \quad (\mathbb{N}, +).$$
4. Algebren, aber keine Halbgruppen sind:
$$(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, :), \quad (\mathbb{Z}, -), \quad (\mathcal{P}(M), \setminus).$$

Quizfragen

Sei $\Sigma = \{a, b, c\}$ ein Alphabet und Σ^* die Menge aller Wörter über Σ. Ist Σ^* zusammen mit der Konkatenation von Wörtern ...

1. eine Algebra?
2. eine Halbgruppe?
3. ein Monoid?
4. eine Gruppe?
5. kommutativ?

Erinnerung: Das leere Wort ϵ ist auch in Σ^* enthalten!

Antworten

1. Ja! Die Konkatenation zweier Wörter aus Σ^* ergibt wieder ein Wort aus Σ^*.
2. Ja! Die Konkatenation ist assoziativ, denn für beliebige Wörter $u, v, w \in \Sigma^*$ gilt $(uv)w = uvw = u(vw)$ (es ist egal welche zwei man zuerst „aneinander klebt“).
3. Ja! Das leere Wort ϵ ist das neutrale Element, denn für ein beliebiges Wort $u \in \Sigma^*$ gilt $\epsilon u = u = u\epsilon$.
4. Nein! Kein Wort u hat ein Inverses u^{-1}. Dieses müsste nämlich eine negative Länge haben, damit $uu^{-1} = \epsilon$ bzw. $u^{-1}u = \epsilon$ gilt.
5. Nein! Nicht für beliebige Wörter $u, v \in \Sigma^*$ gilt $uv = vu$, z.B. für $u = ab$ und $v = bc$.

$(G, \circ)$ bildet mit $G = \mathbb{Q} \setminus \{-1\}$ und $x \circ y := x + y + xy$ eine abelsche Gruppe.

1. Wieso ist G in $\circ$ abgeschlossen?
2. Wieso ist $\circ$ assoziativ?
3. Was ist das neutrale Element in $(G, \circ)$?
4. Besitzt jedes Element $a \in \mathbb{Q} \setminus \{-1\}$ ein Inverses a^{-1}?
5. Was ist das inverse Element x^{-1} zu $x = \frac{3}{4}$?
6. Wieso ist $(G, \circ)$ kommutativ?

Hinweis zu 1.: Da für beliebige $a, b \in \mathbb{Q} \setminus \{-1\}$ offensichtlich $a \circ b \in \mathbb{Q}$ gilt, muss nur

$$a, b \in \mathbb{Q} \setminus \{-1\} \Longrightarrow a \circ b \neq -1$$

gezeigt werden. Zeige dies mit einem Widerspruchsbeweis: Nimm $a, b \in \mathbb{Q} \setminus \{-1\}$ und $a \circ b = -1$ an und leite daraus einen Widerspruch her.

Antworten

1. Seien $a, b \in \mathbb{Q} \setminus \{-1\}$ beliebig mit $a \circ b = -1$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} a \circ b = -1 &\Longrightarrow a + b + ab = -1 \\ &\Longrightarrow a + ab = -1 - b \\ &\Longrightarrow a(1 + b) = -(1 + b) \\ &\Longrightarrow b = -1 \text{ oder } a = \frac{-(1 + b)}{1 + b} = -1 \end{aligned}$$

`

□

2. Seien $a, b, c \in \mathbb{Q} \setminus \{-1\}$ beliebig. Dann gilt:

$$\begin{aligned}(a \circ b) \circ c &= (a + b + ab) \circ c \\ &= (a + b + ab) + c + (a + b + ab)c \\ &= a + b + c + ab + ac + bc + abc\ , \\ a \circ (b \circ c) &= a \circ (b + c + bc) \\ &= a + (b + c + bc) + a(b + c + bc) \\ &= a + b + c + ab + ac + bc + abc.\end{aligned}$$

Somit gilt $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$.

3. Sei e das neutrale Element. Dann gilt für ein beliebiges $a \in \mathbb{Q} \setminus \{-1\}$:

$$\begin{aligned} a \circ e = a &\iff a + e + ae = a \\ &\iff e + ae = 0 \\ &\iff e(1 + a) = 0 \\ &\iff e = 0. \end{aligned}$$

Das neutrale Element ist $e = 0$.

4. Sei $a \in \mathbb{Q} \setminus \{-1\}$ beliebig. Dann gilt:

$$\begin{aligned} a \circ a^{-1} = e &\iff a + a^{-1} + aa^{-1} = 0 \\ &\iff a^{-1} + aa^{-1} = -a \\ &\iff a^{-1}(1 + a) = -a \\ &\iff a^{-1} = \frac{-a}{1 + a}. \end{aligned}$$

   Somit ist für jedes a das inverse Element $\frac{-a}{1+a}$ in der Menge $\mathbb{Q} \setminus \{-1\}$ enthalten.

5. Das Inverse zu $a = \frac{3}{4}$ ist $a^{-1} = \frac{-\frac{3}{4}}{1+\frac{3}{4}} = -\frac{3}{7}$.

6. Seien $a, b \in \mathbb{Q} \setminus \{-1\}$ beliebig. Dann gilt:

$$a \circ b = a + b + ab = b + a + ba = b \circ a.$$

Verknüpfungstafeln

Eine Algebra $(A, \circ)$ über einer endlichen Menge $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ und einem binären Operator $\circ$ über A lässt sich sehr schön mit einer sogenannten Verknüpfungstafel oder Multiplikationstafel darstellen.

Jedes Element aus A bekommt eine bestimmte Zeile und Spalte einer Tabelle. Dann verknüpft man jedes Element mit jedem und trägt das Ergebnis in der entsprechenden Zelle ein.

Beispiel

Sei $(G, \circ)$ eine kommutative Gruppe über einer 4-elementige Menge $G = \{a, b, c, d\}$ mit folgender Verknüpfungstafel für $\circ$:

$\circ$	a	b	c	d
a	b	a	d	c
b	a	b	c	d
c	d	c	a	b
d	c	d	b	a

Woran erkennt man anhand der Verknüpfungstafel, dass $(G, \circ)$ eine kommutative Gruppe ist?

1. G ist abgeschlossen in $\circ$, da in der Tabelle nur Elemente aus G vorkommen.
2. G ist assoziativ. Hierfür muss man alle Kombinationen ausprobieren. Zum Beispiel:

$$c \circ (d \circ a) = c \circ c = a = b \circ a = (c \circ d) \circ a$$

   Es sind insgesamt $|S|^3 = 4^3 = 64$ solche Rechnungen. Nehmen wir einfach mal an, dass wir alle 64 überprüft haben ;-)
3. b ist das neutrale Element in $(G, \circ)$.
4. Jedes Element besitzt ein Inverses:

$$a^{-1} = a, \quad b^{-1} = b, \quad c^{-1} = d, \quad d^{-1} = c.$$

5. $(G, \circ)$ ist kommutativ. Dies erkennt man an der diagonalen Spiegelachse.

Info

Bis auf die Assoziativität, kann man alle Eigenschaften endlicher Algebren an der Verknüpfungstafel erkennen. Die Assoziativität des Operators muss leider mit brute force überprüft oder allgemein bewiesen werden.

Quizfragen

Sei $(G, \circ)$ eine Gruppe mit neutralem Element e und folgender Verknüpfungstafel:

$\circ$	e	x	y	z
e	e	x	y	z
x	x	e	z	y
y	y	z	e	x
z	z	y	x	e

1. Was ist das inverse Element a^{-1} von jedem $a \in G$?
2. Ist $(G, \circ)$ kommutativ?

Antworten

1. Es gilt:
$$e^{-1} = e, \quad x^{-1} = x, \quad y^{-1} = y, \quad z^{-1} = z.$$
2. Ja! Das erkennt man an der diagonales Spiegelachse in der Verknüpfungstafel.

Quizfragen

Sei $(G, \circ)$ eine Gruppe mit neutralem Element e und folgender Verknüpfungstafel:

$\circ$	e	a	b	c	d
e	e	a	b	c	d
a	a	c	d	b	e
b	b	d	a	e	c
c	c	b	e	d	a
d	d	e	c	a	b

1. Was ist das inverse Element a^{-1} von jedem $a \in G$?
2. Ist $(G, \circ)$ kommutativ?

Antworten

1. Es gilt:
$$e^{-1} = e, \quad a^{-1} = d, \quad b^{-1} = c, \quad c^{-1} = b, \quad d^{-1} = a.$$
2. Ja! Das erkennt man an der diagonales Spiegelachse in der Verknüpfungstafel.

Quizfragen

Sei $(G, \circ)$ eine Gruppe mit neutralem Element e und folgender Verknüpfungstafel:

$\circ$	e	p	q	r	s	t
e	e	p	q	r	s	t
p	p	e	t	s	r	q
q	q	s	e	t	p	r
r	r	t	s	e	q	p
s	s	q	r	p	t	e
t	t	r	p	q	e	s

1. Was ist das inverse Element a^{-1} von jedem $a \in G$?
2. Ist $(G, \circ)$ kommutativ?

Antworten

1. Es gilt:

$$e^{-1} = e, \quad p^{-1} = p, \quad q^{-1} = q, \quad r^{-1} = r, \quad s^{-1} = t, \quad t^{-1} = s.$$

2. Nein! Es gilt beispielsweise:

$$p \circ q = t \neq s = q \circ p.$$

Quizfrage

Wir betrachten die logischen Junktoren $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, $\otimes$, $\bar{\wedge}$ und $\bar{\vee}$ nun als Operatoren $\mathbb{B} \times \mathbb{B} \to \mathbb{B}$ für $\mathbb{B} = \{0, 1\}$ und bilden Algebren mit folgenden Verknüpfungstafeln:

$\wedge$	0	1
0	0	0
1	0	1

$\vee$	0	1
0	0	1
1	1	1

$\rightarrow$	0	1
0	1	1
1	0	1

$\leftrightarrow$	0	1
0	1	0
1	0	1

$\otimes$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\bar{\wedge}$	0	1
0	1	1
1	1	0

$\bar{\vee}$	0	1
0	1	0
1	0	0

Wo sind diese Algebren in der Hierarchie einzuordnen?

Hinweis: Mit Wahrheitstafeln kann man überprüfen, dass nur $\wedge$, $\vee$, $\leftrightarrow$ und $\otimes$ assoziativ sind.

Antwort

- Algebren sind sie alle, weil sie alle abgeschlossen sind.
- Halbgruppen sind:

$$(\mathbb{B}, \wedge), \quad (\mathbb{B}, \vee), \quad (\mathbb{B}, \leftrightarrow), \quad (\mathbb{B}, \otimes).$$

- Monoide sind:

$$(\mathbb{B}, \wedge), \quad (\mathbb{B}, \vee), \quad (\mathbb{B}, \leftrightarrow), \quad (\mathbb{B}, \otimes).$$

- Gruppen sind:

$$(\mathbb{B}, \leftrightarrow), \quad (\mathbb{B}, \otimes).$$

- Kommutativ sind:

$$(\mathbb{B}, \wedge), \quad (\mathbb{B}, \vee), \quad (\mathbb{B}, \leftrightarrow), \quad (\mathbb{B}, \otimes), \quad (\mathbb{B}, \bar{\wedge}), \quad (\mathbb{B}, \bar{\vee}).$$

Themenübersicht

Themenübersicht

Eigenschaften von Gruppen

Sei $(G, \circ)$ eine Gruppe mit neutralem Element e. Dann gelten folgende Rechenregeln:

1. Eindeutigkeit des neutralen Elements. Es gibt genau ein neutrales Element e.
2. Eindeutigkeit der inversen Elemente. Jedes Element $a \in G$ besitzt ein inverses Element a^{-1}.
3. Involutionsgesetz. Für jedes $a \in G$ gilt: $(a^{-1})^{-1} = a$
4. Kürzungsregel. Für alle $a, b, c \in G$ gilt:

$$\begin{aligned} a \circ c = b \circ c &\iff a = b \\ c \circ a = c \circ b &\iff a = b \end{aligned}$$

5. Eindeutige Lösung linearer Gleichungen. Für alle $a, b, x \in G$ gilt:

$$\begin{aligned} a \circ x = b &\iff x = a^{-1} \circ b \\ x \circ a = b &\iff x = b \circ a^{-1} \end{aligned}$$

Infos

- Weil Gruppen assoziativ sind, können wir die Klammern oft weglassen. Beispielsweise können wir $a \circ b \circ c$ statt $(a \circ b) \circ c$ oder $a \circ (b \circ c)$ schreiben.
- Weil wir bei Gruppen nur einen Operator zur Verfügung haben, können wir diesen auch einfach weglassen und ab statt $a \circ b$ schreiben.

Quizfrage

Sei $(G, \circ)$ eine beliebige, nicht notwendigerweise kommutative Gruppe mit neutralem Element e und seien $a, b, x \in G$ beliebige Elemente.

Was ist die Lösung der Gleichung

$$b \circ (a \circ x)^{-1} = b \circ a$$

nach x?

Antwort

Weil $\circ$ assoziativ ist, können Klammern weggelassen werden.

$$
\begin{aligned}
b \circ (a \circ x)^{-1} = b \circ a \quad &\iff \quad b^{-1} \circ b \circ (a \circ x)^{-1} = b^{-1} \circ b \circ a \\
&\iff \quad e \circ (a \circ x)^{-1} = e \circ a \\
&\iff \quad (a \circ x)^{-1} = a \\
&\iff \quad \left((a \circ x)^{-1}\right)^{-1} = a^{-1} \\
&\iff \quad a \circ x = a^{-1} \\
&\iff \quad a^{-1} \circ a \circ x = a^{-1} \circ a^{-1} \\
&\iff \quad e \circ x = a^{-1} \circ a^{-1} \\
&\iff \quad x = a^{-1} \circ a^{-1}
\end{aligned}
$$

Kürzungsregel

Die Kürzungsregel.besagt, dass für alle $a, b, c \in G$ gilt:

$$\begin{aligned} a \circ c = b \circ c &\iff a = b \\ c \circ a = c \circ b &\iff a = b \end{aligned}$$

Intuitiv heißt das, dass es in jeder Zeile und Spalte der Verknüpfungstafel jedes Element genau einmal vorkommt.

Info

Man nennt diese Regel auch Sudoku-Regel ;-)

Quizfrage

Sei $(G, \circ)$ eine Gruppe mit $G = \{a, b, c, d, e, f\}$ und folgender (unvollständigen) Verknüpfungstafel:

$\circ$	a	b	c	d	e	f
a						
b		d	e			a
c		f		c		
d						
e	c					d
f	b					

Wie sieht die eindeutige, vollständige Verknüpfungstafel von $(G, \circ)$ aus?
Hinweis: $(G, \circ)$ ist eine Gruppe, d.h.:

- es gilt die Kürzungsregel,
- es gibt ein eindeutiges neutrales Element und
- $\circ$ ist assoziativ, z.B.: $f \circ b = (c \circ b) \circ b = c \circ (b \circ b) = c \circ d = c$

Antwort

Wegen $c \circ d = c$ ist d das neutrale Element. Wir erhalten:

$\circ$	a	b	c	d	e	f
a				a		
b		d	e	b		a
c		f		c		
d	a	b	c	d	e	f
e	c			e		d
f	b			f		

Mit der Kürzungsregel folgt:

$\circ$	a	b	c	d	e	f
a				a		
b	f	d	e	b	c	a
c		f		c		
d	a	b	c	d	e	f
e	c	a		e		d
f	b			f		

Aus der Assoziativität von $\circ$ folgt: $f \circ b = (c \circ b) \circ b = c \circ (b \circ b) = c \circ d = c$.

$\circ$	a	b	c	d	e	f
a				a		
b	f	d	e	b	c	a
c		f		c		
d	a	b	c	d	e	f
e	c	a		e		d
f	b	c		f		

Mit der Kürzungsregel folgt:

$\circ$	a	b	c	d	e	f
a	d	e		a		c
b	f	d	e	b	c	a
c	e	f		c		b
d	a	b	c	d	e	f
e	c	a		e		d
f	b	c		f		e

Aus der Assoziativität von $\circ$ folgt: $a \circ c = a \circ (f \circ b) = (a \circ f) \circ b = c \circ b = f$.

$\circ$	a	b	c	d	e	f
a	d	e	f	a		c
b	f	d	e	b	c	a
c	e	f		c		b
d	a	b	c	d	e	f
e	c	a		e		d
f	b	c		f		e

Mit der Kürzungsregel folgt:

$\circ$	a	b	c	d	e	f
a	d	e	f	a	b	c
b	f	d	e	b	c	a
c	e	f		c		b
d	a	b	c	d	e	f
e	c	a	b	e	f	d
f	b	c		f		e

Aus der Assoziativität von $\circ$ folgt: $c \circ c = c \circ (a \circ f) = (c \circ a) \circ f = e \circ f = d$.

$\circ$	a	b	c	d	e	f
a	d	e	f	a	b	c
b	f	d	e	b	c	a
c	e	f	d	c		b
d	a	b	c	d	e	f
e	c	a	b	e	f	d
f	b	c		f		e

Mit der Kürzungsregel folgt die fertige Verknüpfungstafel:

$\circ$	a	b	c	d	e	f
a	d	e	f	a	b	c
b	f	d	e	b	c	a
c	e	f	d	c	a	b
d	a	b	c	d	e	f
e	c	a	b	e	f	d
f	b	c	a	f	d	e

Potenzen von Elementen

Sei $(G, \circ)$ eine Gruppe mit neutralem Element e. Für ein beliebiges Element $a \in G$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$a^0 := e, \quad a^n := a^{n-1} \circ a \quad \text{und} \quad a^{-n} := (a^{-1})^n.$$

Info

Intuitiv heißt das:

$$a^n = \underbrace{a \circ a \circ \ldots \circ a}_{\text{genau } n \text{ as}} \quad \text{und} \quad a^{-n} = \underbrace{a^{-1} \circ a^{-1} \circ \ldots \circ a^{-1}}_{\text{genau } n \ a^{-1}\text{s}}.$$

Ordnung von Elementen

Sei $(G, \circ)$ eine Gruppe mit neutralem Element e und $a \in G$. Dann ist

$$\operatorname{ord}(a) := \min \{n \in \mathbb{N} \mid a^n = e\}$$

die Ordnung von a in $(G, \circ)$

Infos

- Es gilt $\min \emptyset := \infty$, d.h. dass $\operatorname{ord}(a) = \infty$ gesetzt wird, wenn kein $n \in \mathbb{N}$ mit $a^n = e$ existiert.
- Das einzige Element mit Ordnung 1 ist das neutrale Element.
- Nicht verwechseln: Die Ordnung eines Elements x ist $\operatorname{ord}(x)$. Die Ordnung der Gruppe ist $|G|$.
- Diese Definition könnte auch auf Monoide erweitert werden, obwohl das in DS nicht explizit gemacht wird.

Beispiel

Sei $(G, \circ)$ eine Gruppe mit folgender Verknüpfungstafel:

$\circ$	e	x	y	z
e	e	x	y	z
x	x	e	z	y
y	y	z	x	e
z	z	y	e	x

Es gilt:

$$
\begin{aligned}
e &\rightsquigarrow \operatorname{ord}(e) = 1,\\
x \xrightarrow{\circ x} e &\rightsquigarrow \operatorname{ord}(x) = 2,\\
y \xrightarrow{\circ y} x \xrightarrow{\circ y} z \xrightarrow{\circ y} e &\rightsquigarrow \operatorname{ord}(y) = 4,\\
z \xrightarrow{\circ z} x \xrightarrow{\circ z} y \xrightarrow{\circ z} e &\rightsquigarrow \operatorname{ord}(z) = 4.
\end{aligned}
$$

Noch ein Beispiel

Sei $(G, \circ)$ eine Gruppe mit folgender Verknüpfungstafel:

$\circ$	e	p	q	r	s	t
e	e	p	q	r	s	t
p	p	e	t	s	r	q
q	q	s	e	t	p	r
r	r	t	s	e	q	p
s	s	q	r	p	t	e
t	t	r	p	q	e	s

Es gilt:

$$
\begin{aligned}
e &\quad\leadsto\quad \operatorname{ord}(e) = 1,\\
p \xrightarrow{\circ p} e &\quad\leadsto\quad \operatorname{ord}(p) = 2,\\
q \xrightarrow{\circ q} e &\quad\leadsto\quad \operatorname{ord}(q) = 2,\\
r \xrightarrow{\circ r} e &\quad\leadsto\quad \operatorname{ord}(r) = 2,\\
s \xrightarrow{\circ s} t \xrightarrow{\circ s} e &\quad\leadsto\quad \operatorname{ord}(s) = 3,\\
t \xrightarrow{\circ t} s \xrightarrow{\circ t} e &\quad\leadsto\quad \operatorname{ord}(t) = 3.
\end{aligned}
$$

Zwei unendliche Beispiele

- In der Gruppe $(\mathbb{Z}, +)$ gilt:

$$\operatorname{ord}(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x = 0 \\ \infty & \text{sonst} \end{cases}$$

- In der Gruppe $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$ gilt:

$$\operatorname{ord}(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x = 1 \\ 2 & \text{falls } x = -1 \\ \infty & \text{sonst} \end{cases}$$

Erzeugnisse

Sei $(G, \circ)$ eine Gruppe mit neutralem Element e. Für ein $a \in G$ wird die Menge

$$\langle a \rangle := \{a^n \mid n \in \mathbb{Z}\}.$$

Erzeugnis von a genannt.

Info

- Ist $\text{ord}(a) < \infty$, dann gilt: $\langle a \rangle = \left\{a, a^2, \ldots, a^{\text{ord}(a)}\right\}$.
- Für alle $a \in G$ gilt: $\text{ord}(a) = |\langle a \rangle|$.

Zyklische Gruppen

Sei $(G, \circ)$ eine Gruppe mit neutralem Element e.

- Ein Element $a \in G$ heißt Erzeuger oder Generator von $(G, \circ)$, falls $\langle a \rangle = G$ gilt.
- Besitzt G einen Erzeuger, so heißt G zyklisch.

Infos

- Falls G endlich ist, dann ist $(G, \circ)$ genau dann zyklisch, wenn ein Element $a \in G$ die Ordnung $\text{ord}(a) = |G|$ hat.
- Jede zyklische Gruppe ist kommutativ, aber nicht jede kommutative Gruppe ist zyklisch.

Beispiel

Sei $(G, \circ)$ wieder eine Gruppe mit folgender Verknüpfungstafel:

$\circ$	e	x	y	z
e	e	x	y	z
x	x	e	z	y
y	y	z	x	e
z	z	y	e	x

$(G, \circ)$ ist zyklisch, weil sie von y und z generiert wird:

$$
\begin{aligned}
e & & \rightsquigarrow & \quad \langle e \rangle = \{e\}, \\
x \xrightarrow{\circ x} e & & \rightsquigarrow & \quad \langle x \rangle = \{x, e\}, \\
y \xrightarrow{\circ y} x \xrightarrow{\circ y} z \xrightarrow{\circ y} e & & \rightsquigarrow & \quad \langle y \rangle = \{y, x, z, e\}, \\
z \xrightarrow{\circ z} x \xrightarrow{\circ z} y \xrightarrow{\circ z} e & & \rightsquigarrow & \quad \langle z \rangle = \{z, x, y, e\}.
\end{aligned}
$$

Noch ein Beispiel

Sei $(G, \circ)$ wieder eine Gruppe mit folgender Verknüpfungstafel:

$\circ$	e	p	q	r	s	t
e	e	p	q	r	s	t
p	p	e	t	s	r	q
q	q	s	e	t	p	r
r	r	t	s	e	q	p
s	s	q	r	p	t	e
t	t	r	p	q	e	s

$(G, \circ)$ ist nicht zyklisch, weil sie von keinem Element generiert wird:

$$
\begin{aligned}
e &\quad\leadsto\quad \langle e \rangle = \{e\},\\
p \xrightarrow{\circ p} e &\quad\leadsto\quad \langle p \rangle = \{p, e\},\\
q \xrightarrow{\circ q} e &\quad\leadsto\quad \langle q \rangle = \{q, e\},\\
r \xrightarrow{\circ r} e &\quad\leadsto\quad \langle r \rangle = \{r, e\},\\
s \xrightarrow{\circ s} t \xrightarrow{\circ s} e &\quad\leadsto\quad \langle s \rangle = \{s, t, e\},\\
t \xrightarrow{\circ t} s \xrightarrow{\circ t} e &\quad\leadsto\quad \langle t \rangle = \{t, s, e\}.
\end{aligned}
$$

Drei unendliche Beispiele

- In der Gruppe $(\mathbb{Z}, +)$ generiert jedes Element alle Vielfachen von sich selbst. Beispielsweise gilt:

$$\begin{aligned}
\langle 0 \rangle &= \{0\}, \\
\langle 1 \rangle &= \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}, \\
\langle 2 \rangle &= \{\ldots, -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, \ldots\}, \\
\langle 3 \rangle &= \{\ldots, -9, -6, -3, 0, 3, 6, 9, \ldots\}, \\
&\vdots
\end{aligned}$$

  Für ein beliebiges $k \in \mathbb{Z}$ gilt: $\langle k \rangle = \{k \cdot n \mid n \in \mathbb{Z}\}$. Somit ist das einzige Element, was endlich viele Elemente erzeugt, die 0.

- In der Gruppe $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$ gibt es zwei Elemente, die endlich viele Elemente generieren: 1 und -1. Es gilt: $\langle 1 \rangle = \{1\}$ und $\langle -1 \rangle = \{-1, 1\}$.
- Die Gruppe $(\mathbb{Z}, +)$ ist zyklisch, da sie sowohl von der 1 als auch von der -1 generiert wird. Die Gruppe $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$ ist nicht zyklisch.

Quizfragen

Sei $(G, \circ)$ wieder eine Gruppe mit neutralem Element e und folgender Verknüpfungstafel:

$\circ$	e	x	y	z
e	e	x	y	z
x	x	e	z	y
y	y	z	e	x
z	z	y	x	e

1. Was ist das Erzeugnis $\langle a \rangle$ und die Ordnung $\mathrm{ord}(a)$ von jedem $a \in G$?
2. Ist $(G, \circ)$ zyklisch?

Antworten

1. Als sogenannte Erzeugnistafel:

a	$\langle a \rangle$	$\mathrm{ord}(a)$
e	$\{e\}$	1
x	$\{x, e\}$	2
y	$\{y, e\}$	2
z	$\{z, e\}$	2

2. Nein! Kein Element hat Ordnung 4.

Quizfragen

Sei $(G, \circ)$ wieder eine Gruppe mit neutralem Element e und folgender Verknüpfungstafel:

$\circ$	e	a	b	c	d
e	e	a	b	c	d
a	a	c	d	b	e
b	b	d	a	e	c
c	c	b	e	d	a
d	d	e	c	a	b

1. Was ist das Erzeugnis $\langle a \rangle$ und die Ordnung $\text{ord}(a)$ von jedem $a \in G$?
2. Ist $(G, \circ)$ zyklisch?

Antworten

1. Als Erzeugnistafel:

a	$\langle a \rangle$	$\operatorname{ord}(a)$
e	$\{e\}$	1
a	$\{a, c, b, d, e\}$	5
b	$\{b, a, d, c, e\}$	5
c	$\{c, d, a, b, e\}$	5
d	$\{d, b, c, a, e\}$	5

2. Ja! $(G, \circ)$ wird von a, b, c und d erzeugt.

Quizfragen

Sei $(G, \circ)$ wieder eine Gruppe mit neutralem Element e und folgender Verknüpfungstafel:

$\circ$	e	p	q	r	s	t
e	e	p	q	r	s	t
p	p	e	r	q	t	s
q	q	r	s	t	p	e
r	r	q	t	s	e	p
s	s	t	p	e	r	q
t	t	s	e	p	q	r

1. Was ist das Erzeugnis $\langle a \rangle$ und die Ordnung $\operatorname{ord}(a)$ von jedem $a \in G$?
2. Ist $(G, \circ)$ zyklisch?

Antworten

1. Als Erzeugnistafel:

a	$\langle a \rangle$	$\operatorname{ord}(a)$
e	$\{e\}$	1
p	$\{p, e\}$	2
q	$\{q, s, p, r, t, e\}$	6
r	$\{r, s, e\}$	3
s	$\{s, r, e\}$	3
t	$\{t, r, p, s, q, e\}$	6

2. Ja! $(G, \circ)$ wird von q und t erzeugt.

Quizfrage

Die imaginäre Einheit $i \in \mathbb{C}$ besitzt die Eigenschaft $i^2 = -1$. Wie sehen die Erzeugnisse $\langle i \rangle$ und $\langle -i \rangle$ in der Gruppe $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$ aus?

Antwort

$$
\begin{aligned}
i \xrightarrow{\cdot i} -1 \xrightarrow{\cdot i} -i \xrightarrow{\cdot i} 1 \quad &\rightsquigarrow \quad \langle i \rangle = \{i, -1, -i, 1\}, \\
-i \xrightarrow{\cdot(-i)} -1 \xrightarrow{\cdot(-i)} i \xrightarrow{\cdot(-i)} 1 \quad &\rightsquigarrow \quad \langle -i \rangle = \{-i, -1, i, 1\}.
\end{aligned}
$$

Untergruppen

Sei $(G, \circ)$ eine Gruppe mit neutralem Element e. $(H, \circ)$ ist eine Untergruppe von $(G, \circ)$, falls $H \subseteq G$ und $(H, \circ)$ selber eine Gruppe ist.

Infos

- Damit eine Teilmenge von G mit $\circ$ eine Gruppe bilden kann, muss sie das neutrale Element enthalten.
- $(G, \circ)$ und $(\{e\}, \circ)$ sind immer Untergruppen von $(G, \circ)$. Diese werden triviale Untergruppen genannt.
- Für jedes $a \in G$ ist $(\langle a \rangle, \circ)$ eine zyklische Untergruppe von $(G, \circ)$.
- Ist $(G, \circ)$ endlich, dann ist jede Unteralgebra $(A, \circ)$ von $(G, \circ)$ eine Untergruppe. D.h. man muss nur auf die Abgeschlossenheit von $(A, \circ)$ achten.

Beispiel

Sei $(G, \circ)$ wieder eine Gruppe mit folgender Verknüpfungstafel:

$\circ$	e	x	y	z
e	e	x	y	z
x	x	e	z	y
y	y	z	x	e
z	z	y	e	x

Folgende Mengen bilden mit $\circ$ Untergruppen von $(G, \circ)$:

$$\{e\}, \quad \{e, x\}, \quad \{e, x, y, z\}.$$

Noch ein Beispiel

Sei $(G, \circ)$ wieder eine Gruppe mit folgender Verknüpfungstafel:

$\circ$	e	p	q	r	s	t
e	e	p	q	r	s	t
p	p	e	t	s	r	q
q	q	s	e	t	p	r
r	r	t	s	e	q	p
s	s	q	r	p	t	e
t	t	r	p	q	e	s

Folgende Mengen bilden mit $\circ$ Untergruppen von $(G, \circ)$:

$$\{e\}, \quad \{e, p\}, \quad \{e, q\}, \quad \{e, r\}, \quad \{e, s, t\}, \quad \{e, p, q, r, s, t\}.$$

Mehr Beispiele

- Für jedes $k \in \mathbb{Z}$ ist $(T, +)$ mit

$$T = \{k \cdot n \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

  eine Untergruppe von $(\mathbb{Z}, +)$. Beispielsweise ist T für $k = 2$ die Menge aller geraden Zahlen. Die einzige endliche Untergruppe von $(\mathbb{Z}, +)$ ist $(\{0\}, +)$.
- Die Gruppe $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$ hat genau zwei endliche Untergruppen: $(\{1\}, \cdot)$ und $(\{-1, 1\}, \cdot)$.

Quizfrage

Sei $(G, \circ)$ wieder eine Gruppe mit neutralem Element e und folgender Verknüpfungstafel:

$\circ$	e	x	y	z
e	e	x	y	z
x	x	e	z	y
y	y	z	e	x
z	z	y	x	e

Welche der folgenden Teilmengen von S bilden mit $\circ$ eine Untergruppe?

$$\{e\}, \quad \{e, x\}, \quad \{e, z\}, \quad \{e, x, y\}, \quad \{e, y, z\}, \quad \{e, x, y, z\}.$$

Antwort

Weil G endlich ist, müssen wir nur auf die Abgeschlossenheit der Teilmenge achten. Untergruppen sind dann:

$$\{e\}, \quad \{e, x\}, \quad \{e, z\}, \quad \{e, x, y, z\}.$$

Quizfrage

Sei $(G, \circ)$ wieder eine Gruppe mit neutralem Element e und folgender Verknüpfungstafel:

$\circ$	e	a	b	c	d
e	e	a	b	c	d
a	a	c	d	b	e
b	b	d	a	e	c
c	c	b	e	d	a
d	d	e	c	a	b

Welche der folgenden Teilmengen von S bilden mit $\circ$ eine Untergruppe?

$$\{e\}, \quad \{e, a\}, \quad \{e, a, c\}, \quad \{e, b, d\}, \quad \{e, a, b, c\}, \quad \{e, a, b, c, d\}.$$

Antwort

Weil G endlich ist, müssen wir nur auf die Abgeschlossenheit der Teilmenge achten. Untergruppen sind dann:

$$\{e\}, \quad \{e, a, b, c, d\}.$$

Quizfrage

Sei $(G, \circ)$ wieder eine Gruppe mit neutralem Element e und folgender Verknüpfungstafel:

$\circ$	e	p	q	r	s	t
e	e	p	q	r	s	t
p	p	e	r	q	t	s
q	q	r	s	t	p	e
r	r	q	t	s	e	p
s	s	t	p	e	r	q
t	t	s	e	p	q	r

Welche der folgenden Teilmengen von S bilden mit $\circ$ eine Untergruppe?

$$\{e\}, \quad \{e, p\}, \quad \{e, q\}, \quad \{e, q, s\}, \quad \{e, s, r\}, \quad \{e, p, q, r, s, t\}.$$

Antwort

Weil G endlich ist, müssen wir nur auf die Abgeschlossenheit der Teilmenge achten. Untergruppen sind dann:

$$\{e\}, \quad \{e, p\}, \quad \{e, s, r\}, \quad \{e, p, q, r, s, t\}.$$

Quizfragen

Welche der folgenden Mengen $T_1, T_2, T_3 \subseteq \mathbb{Z}$ bilden mit $+$ eine Untergruppe von $(\mathbb{Z}, +)$?

1. $T_1 = \{0\}$
2. $T_2 = \{2n \mid n \in \mathbb{Z}\}$
3. $T_3 = \{2n + 1 \mid n \in \mathbb{Z}\}$
4. $T_4 = \mathbb{N}$
5. $T_5 = \mathbb{N}_0$

Antworten

1. Ja! T_1 enthält nur das neutrale Element und ist somit eine der trivialen Untergruppen. Sie ist sogar die einzige endliche Untergruppe von $(\mathbb{Z}, +)$.
2. Ja! T_2 ist abgeschlossen, enthält das neutrale Elemente und alle inversen Elemente. T_2 ist die durch 2 bzw. -2 erzeugte Untergruppe.
3. Nein! T_3 enthält alle ungeraden Zahlen und ist deswegen nicht abgeschlossen. Außerdem enthält T_2 nicht das neutrale Element 0.
4. Nein! T_4 ist zwar abgeschlossen, aber enthält nicht das neutrale Element 0. Außerdem enthält sie keine inverse Elemente.
5. Nein! T_5 ist zwar abgeschlossen und enthält das neutrale Element 0, aber die 0 ist das einzige Element was ein Inverses in T_5 besitzt.

Nebenklassen

Sei $(G, \circ)$ eine Gruppe und $(H, \circ)$ eine Untergruppe von $(G, \circ)$. Für jedes $a \in G$ definieren wir:

$$\begin{aligned} H \circ a &:= \{b \circ a \mid b \in H\} \quad \text{(rechte Nebenklasse von } (H, \circ) \text{ zu } a) \\ a \circ H &:= \{a \circ b \mid b \in H\} \quad \text{(linke Nebenklasse von } (H, \circ) \text{ zu } a) \end{aligned}$$

Info

Die Menge der rechten bzw. linken Nebenklassen bildet eine Partition von G.

Beispiel

Sei $(G, \circ)$ wieder eine Gruppe mit folgender Verknüpfungstafel:

$\circ$	e	x	y	z
e	e	x	y	z
x	x	e	z	y
y	y	z	x	e
z	z	y	e	x

a	$\{e, x\} \circ a$	$a \circ \{e, x\}$
e	$\{e, x\}$	$\{e, x\}$
x	$\{x, e\}$	$\{x, e\}$
y	$\{y, z\}$	$\{y, z\}$
z	$\{z, y\}$	$\{z, y\}$

Die Untergruppe $(\{e, x\}, \circ)$ besitzt folgende rechte Nebenklassen:

$$\{e, x\}, \quad \{y, z\}.$$

Diese stimmen mit den linken Nebenklassen überein.

Noch ein Beispiel

Sei $(G, \circ)$ wieder eine Gruppe mit folgender Verknüpfungstafel:

$\circ$	e	p	q	r	s	t
e	e	p	q	r	s	t
p	p	e	t	s	r	q
q	q	s	e	t	p	r
r	r	t	s	e	q	p
s	s	q	r	p	t	e
t	t	r	p	q	e	s

a	$\{e,p\} \circ a$	$a \circ \{e,p\}$
e	$\{e,p\}$	$\{e,p\}$
p	$\{p,e\}$	$\{p,e\}$
q	$\{q,t\}$	$\{q,s\}$
r	$\{r,s\}$	$\{r,t\}$
s	$\{s,r\}$	$\{s,q\}$
t	$\{t,q\}$	$\{t,r\}$

Die Untergruppe $(\{e,p\}, \circ)$ besitzt die rechten Nebenklassen

$$\{e,p\}, \quad \{q,t\}, \quad \{r,s\}$$

und die linken Nebenklassen

$$\{e,p\}, \quad \{q,s\}, \quad \{r,t\}.$$

Der Satz von Lagrange

Sei $(G, \circ)$ eine endliche Gruppe mit neutralem Element e. Dann gilt für jede Untergruppe $(H, \circ)$ von $(G, \circ)$: $|H|$ teilt $|G|$.

Info

Eine sehr wichtige Folgerung ist, dass die Ordnung $\text{ord}(a)$ aller Elemente $a \in G$ auch die Gruppenordnung $|G|$ teilen muss. Sonst wäre $(\langle a \rangle, \circ)$ eine Untergruppe, deren Ordnung $|\langle a \rangle|$ die Gruppenordnung $|G|$ nicht teilt.

Quizfragen

Sei $(G, \circ)$ eine Gruppe mit $G = [307]$, neutralem Element $6 \in G$ und einer hochkomplizierten Operation $\circ$, die kein Mensch versteht.

1. Wie viele verschiedene Untergruppen besitzt $(G, \circ)$?
2. Welche Ordnung hat das Element $28 \in G$?

Erinnerung: $[307] = \{1, 2, \ldots, 307\}$.
Info: 307 ist prim und Lagrange toll.

Antworten

1. Weil $|G| = 307$ prim ist, kann die Anzahl der Elemente einer Untergruppe nach dem Satz von Lagrange nur 1 oder 307 sein. Das sind genau die zwei trivialen Untergruppen $(G, \circ)$ und $(\{6\}, \circ)$. Es gibt also genau zwei Untergruppen.
2. Weil $|G| = 307$ prim ist, muss ord(28) nach dem Satz von Lagrange entweder 1 oder 307 sein. Ordnung 1 hat nur das neutrale Element 6, d.h. 28 muss die Ordnung ord(28) $= 307$ haben.

Quizfrage

Gibt es eine nicht-zyklische Gruppe $(G, \circ)$ mit $|G|$ prim?

Antwort

Nein!

Für jede Gruppe $(G, \circ)$ mit $|G|$ prim gilt nach dem Satz von Lagrange, dass alle Elemente in G entweder 1 oder $|G|$ als Ordnung haben. Da das neutrale Element das einzige Element mit Ordnung 1 ist, haben alle andere Ordnung $|G|$. G enthält also $|G| - 1$ verschiedene Erzeuger und ist somit automatisch zyklisch.

Wichtige Aussagen zu Gruppen

1. Sind $(H_1, \circ)$ und $(H_2, \circ)$ Untergruppen von $(G, \circ)$, dann auch $(H_1 \cap H_2, \circ)$.
2. $(\langle a \rangle, \circ)$ ist für jedes $a \in G$ eine zyklische Untergruppe von $(G, \circ)$.
3. Die Menge der rechten bzw. linken Nebenklassen einer Untergruppe $(H, \circ)$ von $(G, \circ)$ bildet eine Partition von G.
4. Jede Untergruppe einer zyklischen Gruppe $(G, \circ)$ ist auch zyklisch.
5. Jede zyklische Gruppe ist kommutativ.
6. Für jedes Element a einer Gruppe gilt: $\text{ord}(a) = |\langle a \rangle|$.

Wichtige Aussagen zu endlichen Gruppen

1. Jede Unteralgebra einer endlichen Gruppe ist eine Untergruppe.
2. Satz von Lagrange:
   Für jede Untergruppe $(H, \circ)$ einer endlichen Gruppe $(G, \circ)$ gilt: $|H|$ teilt $|G|$.
3. Satz von Lagrange (Folgerung):
   Für alle Elemente $a \in G$ einer endlichen Gruppe $(G, \circ)$ gilt: $\mathrm{ord}(a)$ teilt $|G|$.
4. Wenn $|G|$ prim ist, dann ist $(G, \circ)$ zyklisch.
5. Für jede endliche Gruppe $(G, \circ)$ gilt:

$$(G, \circ) \text{ zyklisch} \iff \exists a \in G : \mathrm{ord}(a) = |G| \ .$$

6. NEU: Für jedes Element a einer Gruppe $(G, \circ)$ gilt: $a^{-1} = a^{|G|-1}$.

Rezept

Frage: Wie findet man alle Untergruppen einer Gruppe $(G, \circ)$?
Methode: Bestimme für jedes $a \in G$ das Erzeugnis $\langle a \rangle$ und die Ordnung $\operatorname{ord}(a)$. Die Menge aller Erzeugnisse ist genau die Menge aller zyklischen Untergruppen. Dann:

1. Ist $(G, \circ)$ zyklisch, so gibt es keine weitere Untergruppen mehr.
2. Sind alle nichttrivialen Teiler von $|G|$ (also alle außer 1 und $|G|$) prim, so gibt es nur triviale und zyklische Untergruppen.
3. Für jeden nichttrivialen Teiler k von $|G|$, der nicht prim ist, versuche eine Untergruppe mit k Elementen durch Ausprobieren zu konstruieren. Die Ordnungen dieser Elemente sollen alle k teilen!

Beispiel

Sei $(G, \circ)$ wieder eine Gruppe mit neutralem Element e und folgender Verknüpfungstafel:

$\circ$	e	p	q	r	s	t
e	e	p	q	r	s	t
p	p	e	r	q	t	s
q	q	r	s	t	p	e
r	r	q	t	s	e	p
s	s	t	p	e	r	q
t	t	s	e	p	q	r

$(G, \circ)$ besitzt folgende Erzeugnistafel:

a	$\langle a \rangle$	$\operatorname{ord}(a)$
e	$\{e\}$	1
p	$\{p, e\}$	2
q	$\{q, s, p, r, t, e\}$	6
r	$\{r, s, e\}$	3
s	$\{s, r, e\}$	3
t	$\{t, r, p, s, q, e\}$	6

Die Gruppe ist zyklisch, weil sie von q bzw. t erzeugt wird. D.h. es gibt nur zyklische Untergruppen:

$$\{e\}, \quad \{e, p\}, \quad \{e, r, s\}, \quad \{e, p, q, r, s, t\}.$$

Noch ein Beispiel

Sei $(G, \circ)$ wieder eine Gruppe mit neutralem Element e und folgender Verknüpfungstafel:

$\circ$	e	x	y	z
e	e	x	y	z
x	x	e	z	y
y	y	z	e	x
z	z	y	x	e

$(G, \circ)$ besitzt folgende Erzeugnistafel:

a	$\langle a \rangle$	$\operatorname{ord}(a)$
e	$\{e\}$	1
x	$\{x, e\}$	2
y	$\{y, e\}$	2
z	$\{z, e\}$	2

Die Gruppe ist zwar nicht zyklisch, aber der einzige nichttriviale Teiler von $|G| = 4$ ist 2, also prim. Die Untergruppen sind also alle zyklisch oder trivial:

$$\{e\}, \quad \{e, x\}, \quad \{e, y\}, \quad \{e, z\}, \quad \{e, x, y, z\}.$$

Ein letztes Beispiel

Sei $(G, \circ)$ eine Gruppe mit folgender Verknüpfungstafel:

$\circ$	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	2	3	4	5	6	7	8
2	2	4	1	3	6	8	5	7
3	3	1	4	2	7	5	8	6
4	4	3	2	1	8	7	6	5
5	5	6	7	8	1	2	3	4
6	6	8	5	7	2	4	1	3
7	7	5	8	6	3	1	4	2
8	8	7	6	5	4	3	2	1

$(G, \circ)$ besitzt folgende Erzeugnistafel:

a	$\langle a \rangle$	$\mathrm{ord}(a)$
1	$\{1\}$	1
2	$\{2, 4, 3, 1\}$	4
3	$\{3, 4, 2, 1\}$	4
4	$\{4, 1\}$	2
5	$\{5, 1\}$	2
6	$\{6, 4, 7, 1\}$	4
7	$\{7, 4, 6, 1\}$	4
8	$\{8, 1\}$	2

$(G, \circ)$ ist nicht zyklisch und $|G| = 8$ besitzt den nicht-trivialen Teiler 4. D.h. es könnte nicht-zyklische Untergruppen mit 4 Elementen geben.

Für diese Untergruppen kommen nur Elemente infrage, deren Ordnung kleiner oder gleich 4 ist (sonst wären sie zyklisch), aber 4 teilt (laut Lagrange).

In diesem Fall ist $\{1, 4, 5, 8\}$ die einzige Kandidatin für eine solche Untergruppe. Stellt man eine Verknüpfungstafel für sie auf, so stellt man fest, dass sie eine Unteralgebra und somit auch eine Untergruppe von $(G, \circ)$ bildet:

$\circ$	1	4	5	8
1	1	4	5	8
4	4	1	8	5
5	5	8	1	4
8	8	5	4	1

Die Untergruppen von $(G, \circ)$ sind also:

$$\underbrace{\{1\}, \{1,4\}, \{1,5\}, \{1,8\}, \{1,2,3,4\}, \{1,4,6,7\}}_{\text{zyklische Untergruppen}}, \underbrace{\{1,4,5,8\}, \{1,2,3,4,5,6,7,8\}}_{\text{nicht-zyklische Untergruppen}}.$$

Quizfrage

Welche der folgenden Kongruenzen sind richtig? Streiche bei den falschen das Symbol $\equiv_n$ durch.

$$\begin{array}{rlll} -7 & \equiv_3 & 8, & \qquad 7 \equiv_5 -11, \\ 2 & \equiv_6 & 8, & -10 \equiv_{11} 22, \\ 3 & \equiv_{12} & 27, & 6 \equiv_4 18, \\ -4 & \equiv_7 & -11, & 15 \equiv_3 -13, \\ 11 & \equiv_1 & -5, & -4 \equiv_2 108. \end{array}$$

Hinweis: Was die Kongruenzrelation modulo n ist, muss bestimmt wieder aufgefrischt werden! Die Definition und ein paar Beispiele gibt es auf Folie 158.

Antwort

$$
\begin{array}{rcl}
-7 & \equiv_3 & 8, \\
2 & \equiv_6 & 8, \\
3 & \equiv_{12} & 27, \\
-4 & \equiv_7 & -11, \\
11 & \equiv_1 & -5,
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rcl}
7 & \not\equiv_5 & -11, \\
-10 & \not\equiv_{11} & 22, \\
6 & \equiv_4 & 18, \\
15 & \not\equiv_3 & -13, \\
-4 & \equiv_2 & 108.
\end{array}
$$

Themenübersicht

Die Modulo-Operation

Modulo kann auch als Operation mod : $\mathbb{Z} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}_0$. aufgefasst werden. Für beliebige $a \in \mathbb{Z}$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$a \bmod n := a - \left\lfloor \frac{a}{n} \right\rfloor \cdot n.$$

Info

$\lfloor x \rfloor := \max \{ m \in \mathbb{Z} \mid m \leq x \}$ rundet den Wert von x ab.

Die Modulo-Operation (Alternative Definition)

Die Modulo-Operation wird auch wie folgt definiert werden. Für beliebige $a \in \mathbb{Z}$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$a \bmod n = r \quad :\Longleftrightarrow \quad a \equiv_n r \text{ und } 0 \leq r \leq n \ .$$

Diese Definition ist äquivalent zur ersten.

Erinnerung

Aus Folie 158 wissen wir:

$$a \bmod n = r \iff \exists k \in \mathbb{Z} : a = kn + r \iff (a - r) \mid n$$

Beispiele

- Bei großen Zahlen benutzt man am besten die Formel:

$$437 \bmod 7 = 437 - \left\lfloor \frac{437}{7} \right\rfloor \cdot 7 = 437 - 62 \cdot 7 = 3$$
$$-245 \bmod 9 = -245 - \left\lfloor \frac{-245}{9} \right\rfloor \cdot 9 = -245 - (-28) \cdot 9 = 7$$

- Bei kleinen Zahlen benutzt man am besten die Kongruenz modulo n:

$$29 \equiv_5 24 \equiv_5 19 \equiv_5 14 \equiv_5 9 \equiv_5 4 \quad \rightsquigarrow \quad 29 \bmod 5 = 4$$
$$-13 \equiv_3 -10 \equiv_3 -7 \equiv_3 -4 \equiv_3 -1 \equiv_3 2 \quad \rightsquigarrow \quad -13 \bmod 3 = 2$$

Quizfragen

1. Was ist 35 mod 6?
2. Was ist 3 mod 7?
3. Was ist (-5) mod 11?
4. Was ist (-17) mod 6?
5. Was ist 38 mod 2?
6. Was ist 75 mod 9?
7. Was ist (-36) mod 9?
8. Was ist 5 mod 1?
9. Was ist $(n^2 - 1)$ mod $(n + 1)$ für ein beliebiges $n \in \mathbb{N}$?
10. Was ist n^2 mod $(n + 1)$ für ein beliebiges $n \in \mathbb{N}$?

Antworten

1. $35 \bmod 6 = 5$.
2. $3 \bmod 7 = 3$.
3. $-5 \bmod 11 = 6$.
4. $-17 \bmod 6 = 1$.
5. $38 \bmod 2 = 0$.
6. $75 \bmod 9 = 3$.
7. $-36 \bmod 9 = 0$.
8. $5 \bmod 1 = 0$.
9. $n^2 - 1 \bmod (n+1) = (n+1)(n-1) \bmod (n+1) = 0$.
10. $n^2 \bmod (n+1) = ((n+1)^2 - 2(n+1) + 1) \bmod (n+1) = 1$.

Rechenregeln für Modulo

Für beliebige $a, b, n \in \mathbb{N}$ gilt:

1. $(a + b) \bmod n = ((a \bmod n) + (b \bmod n)) \bmod n$,
2. $(a \cdot b) \bmod n = ((a \bmod n) \cdot (b \bmod n)) \bmod n$,
3. $(a \cdot b) \bmod (a \cdot n) = a \cdot (b \bmod n)$.

Quizfragen

1. Was ist 2^{168} mod 3?
2. Was ist 2^{201} mod 3?
3. Was ist 100^{99} mod 9?
4. Was ist 2^{3600} mod 31?
5. Was ist $(10^{85} + 5^{63} + 12^{47})$ mod 3?

Taschenrechner sind verboten! ;-)

Antworten

1. 4 (also 2^2) ergibt 1 modulo 3:
   $2^{168} \bmod 3 = (2^2)^{84} \bmod 3 = 4^{84} \bmod 3 = 1^{84} \bmod 3 = 1$.
2. 4 (also 2^2) ergibt 1 modulo 3:
   $2^{201} \bmod 3 = ((2^2)^{100} \cdot 2) \bmod 3 = (1 \cdot 2) \bmod 3 = 2$.
3. 100 ergibt 1 modulo 9:
   $100^{99} \bmod 9 = 1^{99} \bmod 9 = 1$.
4. 32 (also 2^5) ergibt 1 modulo 31:
   $2^{500} \bmod 31 = (2^5)^{100} \bmod 31 = 32^{100} \bmod 31 = 1^{100} \bmod 31 = 1$.
5. 10, 5^2 und 12 ergeben entsprechend 1, 1 und 0 modulo 3:
   $(10^{85} + 5^{63} + 12^{47}) \bmod 3 = (10^{85} + (5^2)^{31} \cdot 5 + 12^{47}) \bmod 3 =$
   $(10^{85} + 25^{31} \cdot 5 + 12^{47}) \bmod 3 = (1^{85} + 1^{31} \cdot 5 + 0^{47}) \bmod 3 = (1 + 5 + 0) \bmod 3 = 0$.

Die Ganzzahlige Division

$a \div n$ ist das ganzzahlige Ergebnis der Division von $a \in \mathbb{Z}$ durch $n \in \mathbb{N}$. Es gilt:

$$a \div n := \frac{a - (a \bmod n)}{n} = \left\lfloor \frac{a}{n} \right\rfloor .$$

Beispiele

Es gilt:

$$12 \div 5 = \frac{12 - (12 \bmod 5)}{5} = \frac{12-2}{5} = \frac{10}{5} = 2$$
$$-11 \div 3 = \frac{-11 - (-11 \bmod 3)}{3} = \frac{-11-1}{3} = \frac{-12}{3} = -4$$

bzw.

$$12 \div 5 = \left\lfloor \frac{12}{5} \right\rfloor = \lfloor 2,4 \rfloor = 2$$
$$-11 \div 3 = \left\lfloor \frac{-11}{3} \right\rfloor = \lfloor -3,666\ldots \rfloor = -4$$

Quizfragen

1. Was ist $7 \div 3$?
2. Was ist $23 \div 6$?
3. Was ist $38 \div 7$?
4. Was ist $-15 \div 4$?
5. Was ist $-8 \div 5$?
6. Was ist $-10 \div 4$?
7. Was ist $-n \div 1$ für ein beliebiges $n \in \mathbb{N}$?
8. Was ist $-2n \div 2$ für ein beliebiges $n \in \mathbb{N}$?

Antworten

1. $7 \div 3 = \frac{7-(7 \bmod 3)}{3} = 2.$
2. $23 \div 6 = \frac{23-(23 \bmod 6)}{6} = 3.$
3. $38 \div 7 = \frac{38-(38 \bmod 7)}{7} = 5.$
4. $-15 \div 4 = \frac{-15-(-15 \bmod 4)}{4} = -4.$
5. $-8 \div 5 = \frac{-8-(-8 \bmod 5)}{5} = -2.$
6. $-10 \div 4 = \frac{-10-(-10 \bmod 4)}{4} = -3.$
7. $-n^2 \div 1 = \frac{-n^2-(-n^2 \bmod 1)}{1} = \frac{-n^2-0}{1} = -n.$
8. $-2n \div 2 = \frac{-2n-(-2n \bmod 2)}{2} = \frac{-2n-0}{2} = -n.$

Additive Gruppe Modulo n

Seien $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{Z}_n := \{0, \ldots, n-1\}$ die Menge aller möglichen Reste einer Division durch n und $+_n$ die Addition modulo n mit

$$a +_n b := (a + b) \bmod n.$$

Dann ist $(\mathbb{Z}_n, +_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ eine Gruppe.

Info

Weil wir $\mathbb{Z}_n$ immer nur in Kombination mit $+_n$ betrachten werden, schreiben wir oft einfach $\mathbb{Z}_n$ statt $(\mathbb{Z}_n, +_n)$.

Beispiel

$(\mathbb{Z}_3, +_3)$ ist eine Gruppe mit Trägermenge

$$\mathbb{Z}_3 = \{0, 1, 2\}$$

und folgender Verknüpfungstafel:

$+_3$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

$\longleftarrow$ z.B. $1 +_3 2 = (1 + 2) \bmod 3 = 0$

Noch ein Beispiel

$(\mathbb{Z}_4, +_4)$ ist eine Gruppe mit Trägermenge

$$\mathbb{Z}_4 = \{0, 1, 2, 3\}$$

und folgender Verknüpfungstafel:

$+_4$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

$\longleftarrow$ z.B. $2 +_4 3 = (2 + 3) \bmod 4 = 1$

Ein letztes Beispiel

$(\mathbb{Z}_5, +_5)$ ist eine Gruppe mit Trägermenge

$$\mathbb{Z}_5 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$$

und folgender Verknüpfungstafel:

$+_5$	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

$\longleftarrow$ z.B. $3 +_5 4 = (3 + 4) \bmod 5 = 2$

Eigenschaften von $(\mathbb{Z}_n, +_n)$

Die Gruppe $\mathbb{Z}_n$ besitzt für jedes $n \in \mathbb{N}$ folgende Eigenschaften:

- $|\mathbb{Z}_n| = n$.
- Das neutrale Element ist die 0.
- Das inverse Element von $m \in \mathbb{Z}_n$ ist $m^{-1} = (-m) \bmod n$.
- $(\mathbb{Z}_n, +_n)$ ist kommutativ und zyklisch.
- Die Elemente 1 und $n-1$ sind immer Erzeuger der Gruppe. Es können aber mehr als die zwei sein!
- Die Ordnung von $m \in \mathbb{Z}_n$ ist $\text{ord}(m) = \frac{n}{\text{ggT}(m,n)}$.

Themenübersicht

ggT und kgV

Seien $m, n \in \mathbb{N}_0$. Der größte gemeinsame Teiler $\mathrm{ggT}(m, n)$ von m und n ist die größte natürliche Zahl, die sowohl m als auch n teilt. Das kleinste gemeinsame Vielfache $\mathrm{kgV}(m, n)$ von m und n ist die kleinste natürliche Zahl, die sowohl von m als auch von n geteilt wird.

Infos

- Wie die Teilbarkeitsrelation funktioniert kann auf Folie 150 nachgelesen werden.
- Es gilt:
$$\mathrm{kgV}(m, n) = \frac{m \cdot n}{\mathrm{ggT}(m, n)}.$$
- Falls $\mathrm{ggT}(m, n) = 1$ bzw. $\mathrm{kgV}(m, n) = m \cdot n$ gilt, dann sagt man, dass m und n teilerfremd oder koprim zueinander sind.

Beispiele

1. Für $m = 14$ und $n = 15$ gilt:

   $2 \cdot 7$ (über 14), $3 \cdot 5$ (über 15)

   $$\mathrm{ggT}(14, 15) = 1 \quad \text{und} \quad \mathrm{kgV}(14, 15) = 210.$$

   $2^2 \cdot 3 \cdot 5$ (über 60), $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$ (über 210)

2. Für $m = 24$ und $n = 60$ gilt:

   $2^3 \cdot 3$ (über 24)

   $$\mathrm{ggT}(24, 60) = 12 \quad \text{und} \quad \mathrm{kgV}(24, 60) = 120.$$

   $2^2 \cdot 3$ (über 12), $2^3 \cdot 3 \cdot 5$ (über 120)

3. Für $m \in \{0, 1\}$ und $n \in \mathbb{N}_0$ beliebig gilt:

   $$\mathrm{ggT}(0, n) = n, \quad \mathrm{kgV}(0, n) = 0, \quad \mathrm{ggT}(1, n) = 1 \quad \text{und} \quad \mathrm{kgV}(1, n) = n.$$

Euklidischer Algorithmus

Für zwei beliebige natürliche Zahlen $m, n \in \mathbb{N}_0$ mit $m \leq n$ berechnet der euklidische Algorithmus den größten gemeinsamen Teiler $\mathrm{ggT}(m, n)$ aus n und m. Dazu setzt er $r_0 = n$ und $r_1 = m$ und füllt systematisch mit den Formeln

$$r_{i-1} \bmod r_i = r_{i+1} \quad \text{und} \quad r_{i-1} \div r_i = s_i$$

folgende Tabelle von oben nach unten aus

r_i	s_i
n	–
m	s_1
r_2	s_2
r_3	s_3
⋮	⋮
r_{k-1}	s_{k-1}
0	–

bis $r_k = 0$ ist. Dann gilt: $\mathrm{ggT}(m, n) = r_{k-1}$

Beispiel

Wir bestimmten $\mathrm{ggT}(21, 100)$ mit dem euklidischen Algorithmus.

r_i	s_i
100	–
21	4
16	1
5	3
1	5
0	–

Es gilt: $\mathrm{ggT}(21, 100) = 1$.

Noch ein Beispiel

Wir bestimmten $\mathrm{ggT}(28, 74)$ mit dem euklidischen Algorithmus.

r_i	s_i
74	–
28	2
18	1
10	1
8	1
2	4
0	–

Es gilt: $\mathrm{ggT}(28, 74) = 2$.

Quizfragen

1. Was ist $\mathrm{ggT}(28, 76)$?
2. Was ist $\mathrm{ggT}(96, 129)$?
3. Was ist $\mathrm{ggT}(46, 53)$?
4. Was ist $\mathrm{ggT}(41, 94)$?

Hinweis: Benutze den euklidischen Algorithmus!

Antworten

Antworten ohne Rechnungen:

1. $\mathrm{ggT}(28, 76) = 4$.
2. $\mathrm{ggT}(96, 129) = 3$.
3. $\mathrm{ggT}(46, 53) = 1$.
4. $\mathrm{ggT}(41, 94) = 1$.

Die Menge $\mathbb{Z}_n^*$

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ enthält die Menge

$$\mathbb{Z}_n^* := \{m \in \mathbb{Z}_n \mid \text{ggT}(m, n) = 1\}$$

alle Zahlen aus $\mathbb{Z}_n$, die zu n teilerfremd sind.

Infos

- Sind m und n klein, dann kann man sie in Primfaktoren zerlegen und überprüfen, ob sie mindestens einen gemeinsamen Primfaktor haben ($\text{ggT}(m, n) > 1$) oder nicht ($\text{ggT}(m, n) = 1$).
- Hat man keine Lust zu Faktorisieren, dann kann man $\text{ggT}(m, n)$ mit dem euklidischen Algorithmus berechnen.
- Erinnerung: Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt $\text{ggT}(0, n) = n$ und $\text{ggT}(1, n) = 1$.

Beispiel

12 besitzt die Primteiler 2 und 3. Somit enthält $\mathbb{Z}_{12}^*$ alle Elemente aus $\mathbb{Z}_{12}$, die weder 2 als auch 3 als Primteiler besitzen.

Daraus folgt:

$$\mathbb{Z}_{12}^* = \{\not{0}, 1, \not{2}, \not{3}, \not{4}, 5, \not{6}, 7, \not{8}, \not{9}, \not{10}, 11\} = \{1, 5, 7, 11\}.$$

$\gcd(0, 12) = 12$, $2 \cdot 3$, 3^2, $2^2 \cdot 3$, 2, 3, 2^2, 2^3, $2 \cdot 5$

Quizfragen

1. Was ist $\mathbb{Z}_1^*$ extensional?
2. Was ist $\mathbb{Z}_2^*$ extensional?
3. Was ist $\mathbb{Z}_3^*$ extensional?
4. Was ist $\mathbb{Z}_4^*$ extensional?
5. Was ist $\mathbb{Z}_5^*$ extensional?
6. Was ist $\mathbb{Z}_6^*$ extensional?
7. Was ist $\mathbb{Z}_7^*$ extensional?
8. Was ist $\mathbb{Z}_8^*$ extensional?
9. Was ist $\mathbb{Z}_9^*$ extensional?
10. Was ist $\mathbb{Z}_{10}^*$ extensional?
11. Was ist $\mathbb{Z}_{18}^*$ extensional?
12. Was muss für n gelten, damit $\mathbb{Z}_n^* = \mathbb{Z}_n \setminus \{0\}$ gilt?

Antworten

1. $\mathbb{Z}_1^* = \{0\}$ (wegen ggT$(0,1) = 1$, s. Infos auf Folie 1049),
2. $\mathbb{Z}_2^* = \{\cancel{0}, 1\} = \{1\}$,
3. $\mathbb{Z}_3^* = \{\cancel{0}, 1, 2\} = \{1, 2\}$,
4. $\mathbb{Z}_4^* = \{\cancel{0}, 1, \cancel{2}, 3\} = \{1, 3\}$,
5. $\mathbb{Z}_5^* = \{\cancel{0}, 1, 2, 3, 4\} = \{1, 2, 3, 4\}$,
6. $\mathbb{Z}_6^* = \{\cancel{0}, 1, \cancel{2}, \cancel{3}, \cancel{4}, 5\} = \{1, 5\}$,
7. $\mathbb{Z}_7^* = \{\cancel{0}, 1, 2, 3, 4, 5, 6\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
8. $\mathbb{Z}_8^* = \{\cancel{0}, 1, \cancel{2}, 3, \cancel{4}, 5, \cancel{6}, 7\} = \{1, 3, 5, 7\}$.
9. $\mathbb{Z}_9^* = \{\cancel{0}, 1, 2, \cancel{3}, 4, 5, \cancel{6}, 7, 8\} = \{1, 2, 4, 5, 7, 8\}$.
10. $\mathbb{Z}_{10}^* = \{\cancel{0}, 1, \cancel{2}, 3, \cancel{4}, \cancel{5}, \cancel{6}, 7, \cancel{8}, 9\} = \{1, 3, 7, 9\}$.
11. $\mathbb{Z}_{18}^* = \{\cancel{0}, 1, \cancel{2}, \cancel{3}, \cancel{4}, 5, \cancel{6}, 7, \cancel{8}, \cancel{9}, \cancel{10}, 11, \cancel{12}, 13, \cancel{14}, \cancel{15}, \cancel{16}, 17\} = \{1, 5, 7, 11, 13, 17\}$.
12. n muss teilerfremd zu $1, 2, 3, \ldots, n-1$ sein, d.h. n muss prim sein.

Info: $0 \in \mathbb{Z}_n^*$ gilt nur falls $n = 1$.

Eulersche Phi-Funktion

Die eulersche Phi-Funktion gibt die Anzahl der Elemente in $\mathbb{Z}_n^*$ an. Es gilt:

$$\varphi(n) := |\mathbb{Z}_n^*|.$$

Ist die Primfaktorzerlegung $n = p_1^{e_1} \cdot p_2^{e_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{e_k}$ von n bekannt, dann kann man den Wert von $\varphi(n)$ ganz einfach mit folgender Formel berechnen:

$$\varphi(n) = p_1^{e_1-1} \cdot (p_1 - 1) \cdot p_2^{e_2-1} \cdot (p_2 - 1) \cdot \ldots \cdot p_k^{e_k-1} \cdot (p_k - 1).$$

Beispiel

Für 400 gilt:

$$\varphi(400) = \underset{\substack{\uparrow \\ 2^4 \cdot 5^2}}{2^{4-1}} \cdot (2-1) \cdot 5^{2-1} \cdot (5-1) = 8 \cdot 20 = 160.$$

Quizfragen

1. Was ist $\varphi(36)$?
2. Was ist $\varphi(64)$?
3. Was ist $\varphi(72)$?
4. Was ist $\varphi(210)$?
5. Was ist $\varphi(1000)$?
6. Ist φ monoton wachsend?

Info: Eine Funktion f heißt *monoton wachsend*, wenn für alle m, n im Definitionsbereich gilt:

$$m \leq n \implies f(m) \leq f(n) \ .$$

Antworten

1. $\varphi(36) = 2^{2-1} \cdot (2-1) \cdot 3^{2-1} \cdot (3-1) = 12$.
2. $\varphi(64) = 2^{6-1} \cdot (2-1) = 32$.
3. $\varphi(72) = 2^{3-1} \cdot (2-1) \cdot 3^{2-1} \cdot (3-1) = 24$.
4. $\varphi(210) = 2^{1-1} \cdot (2-1) \cdot 3^{1-1} \cdot (3-1) \cdot 5^{1-1} \cdot (5-1) \cdot 7^{1-1} \cdot (7-1) = 1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 6 = 48$.
5. $\varphi(1000) = 2^{3-1} \cdot (2-1) \cdot 5^{3-1} \cdot (5-1) = 4 \cdot 100 = 400$.
6. Nö! Es gilt $64 \leq 72$, aber $\varphi(64) > \varphi(72)$.

Multiplikative Gruppe Modulo n

Seien $n \in \mathbb{N}$ und $\cdot_n$ die Multiplikation modulo n mit

$$a \cdot_n b := (a \cdot b) \bmod n.$$

Dann ist $(\mathbb{Z}_n^*, \cdot_n)$ eine Gruppe.

Infos

- Die Menge $\mathbb{Z}_n$ (ohne Stern) bildet mit $\cdot_n$ ein Monoid, aber nicht immer eine Gruppe.
- $\mathbb{Z}_n^*$ enthält genau die Elemente aus $\mathbb{Z}_n$, die ein Inverses bezüglich $\cdot_n$ besitzen.
- Weil wir $\mathbb{Z}_n^*$ immer nur in Kombination mit $\cdot_n$ betrachten werden, schreiben wir oft einfach $\mathbb{Z}_n^*$ statt $(\mathbb{Z}_n^*, \cdot_n)$.

Beispiel

$(\mathbb{Z}_6^*, \cdot_6)$ ist eine Gruppe mit Trägermenge

$$\mathbb{Z}_6^* = \{1, 5\}$$

und folgender Verknüpfungstafel:

$\cdot_6$	1	5
1	1	5
5	5	1

← z.B. $5 \cdot_6 5 = (5 \cdot 5) \bmod 6 = 25 \bmod 6 = 1$

Noch ein Beispiel

$(\mathbb{Z}_{10}^*, \cdot_{10})$ ist eine Gruppe mit Trägermenge

$$\mathbb{Z}_{10}^* = \{1, 3, 7, 9\}$$

und folgender Verknüpfungstafel:

$\cdot_{10}$	1	3	7	9
1	1	3	7	9
3	3	9	1	7
7	7	1	9	3
9	9	7	3	1

$\longleftarrow$ z.B. $7 \cdot_{10} 9 = (7 \cdot 9) \bmod 10 = 63 \bmod 10 =$

Ein letztes Beispiel

$(\mathbb{Z}_{18}^*, \cdot_{18})$ ist eine Gruppe mit Trägermenge

$$\mathbb{Z}_{18}^* = \{1, 5, 7, 11, 13, 17\}$$

und folgender Verknüpfungstafel:

$\cdot_{18}$	1	5	7	11	13	17
1	1	5	7	11	13	17
5	5	7	17	1	11	13
7	7	17	13	5	1	11
11	11	1	5	13	17	7
13	13	11	1	17	7	5
17	17	13	11	7	5	1

← z.B. $11 \cdot_{18} 17 = (11 \cdot 17) \bmod 18 = 1$

Quizfragen

1. Wie sieht die Verknüpfungstafel von $(\mathbb{Z}_8^*, \cdot_8)$ aus?
2. Wie sieht die Verknüpfungstafel von $(\mathbb{Z}_{12}^*, \cdot_{12})$ aus?

Antworten

1. Wir hatten bereits:

$$\mathbb{Z}_8^* = \{1, 3, 5, 7\}.$$

Die Verknüpfungstafel von $(\mathbb{Z}_8^*, \cdot_8)$ ist dann:

$\cdot_8$	1	3	5	7
1	1	3	5	7
3	3	1	7	5
5	5	7	1	3
7	7	5	3	1

2. Wir hatten bereits:

$$\mathbb{Z}_{12}^* = \{1, 5, 7, 11\}.$$

Die Verknüpfungstafel von $(\mathbb{Z}_{12}^*, \cdot_{12})$ ist dann:

$\cdot_{12}$	1	5	7	11
1	1	5	7	11
5	5	1	11	7
7	7	11	1	5
11	11	7	5	1

Lemma von Bézout

Für zwei beliebige natürliche Zahlen $m, n \in \mathbb{N}_0$ existieren ganze Zahlen $a, b \in \mathbb{Z}$ mit:

$$a \cdot m + b \cdot n = \mathrm{ggT}(m, n).$$

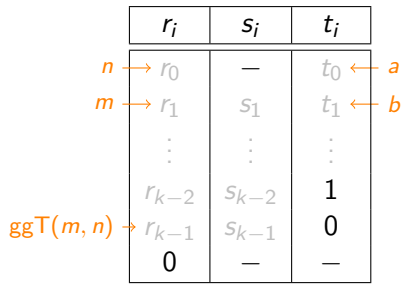
Sei o.B.d.A. $m \leq n$. Um a und b zu bestimmen wird der euklidische Algorithmus ausgeführt und die Tabelle um eine Spalte t_i erweitert. Diese wird dann von unten nach oben mit den Formeln

$$t_{k-1} = 0 \quad t_{k-2} = 1 \quad \text{und} \quad t_{i-1} = t_{i+1} - t_i \cdot s_i$$

ausgefüllt. Dieser Algorithmus wird erweiterte euklidische Algorithmus genannt. Nach der Ausführung gilt $a = t_0$ und $b = t_1$.

Infos

- Die Tabelle des erweiterten euklidischen Algorithmus hat dann immer folgende Gestalt:



- Es gibt immer unendlich viele Möglichkeiten a und b für das Lemma von Bézout zu wählen. Der erweiterte euklidische Algorithmus liefert nur eine davon.
- Wir könnten die Definition von $\mathrm{ggT}(m,n)$ und das Lemma von Bézout auf ganze Zahlen $m, n \in \mathbb{Z}$ verallgemeinern, aber das ist für uns in DS irrelevant.

Beispiel

Für $n = 100$ und $m = 21$ erhalten wir

r_i	s_i	t_i
100	–	-19
21	4	4
16	1	-3
5	3	1
1	5	0
0	–	–

Es folgt $\mathrm{ggT}(100, 21) = 1$ und

$$(-19) \cdot 21 + 4 \cdot 100 = 1.$$

Beispiel

Für $n = 100$ und $m = 21$ erhalten wir

r_i	s_i	t_i
100	–	-19
21	4	4
16	1	-3
5	3	1
1	5	0
0	–	–

Es folgt $\mathrm{ggT}(100, 21) = 1$ und

$$(\text{-19}) \cdot 21 + 4 \cdot 100 = 1 .$$

Info

Am besten merkt man sich die Formeln intuitiv.

- Für die ersten zwei Spalten gilt:

  „ oben durch mitte gleich rechts , Rest unten .“

- Für die letzte Spalte gilt:

  „ unten minus (mitte mal links) gleich oben .“

$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
r_{i-1}	s_{i-1}	t_{i-1}
r_i	s_i	t_i
r_{i+1}	s_{i+1}	t_{i+1}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
r_{i-1}	s_{i-1}	t_{i-1}
r_i	s_i	t_i
r_{i+1}	s_{i+1}	t_{i+1}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Noch ein Beispiel

Für $n = 74$ und $m = 28$ gilt:

r_i	s_i	t_i
74	–	8
28	2	−3
18	1	2
10	1	−1
8	1	1
2	4	0
0	–	–

Es folgt $\mathrm{ggT}(28, 74) = 2$ und

$$8 \cdot 28 + (-3) \cdot 74 = 2 .$$

Quizfrage

Für welche $a, b \in \mathbb{Z}$ gilt die gegebene Gleichung?

1. $a \cdot 33 + b \cdot 51 = 3$.
2. $a \cdot 53 + b \cdot 89 = 1$.
3. $a \cdot 38 + b \cdot 62 = 2$.
4. $a \cdot 14 + b \cdot 45 = 1$.
5. $a \cdot 55 + b \cdot 79 = 5$. Achtung: fiese Falle!

Antwort (ohne Rechnungen)

Die Lösung auf diese Frage ist nicht eindeutig (s. Folie 1065). Folgende Werte wurden mit dem erweiterten euklidischen Algorithmus berechnet.

1. $a = -3$, $b = 2$.
2. $a = 42$, $b = -25$.
3. $a = -13$, $b = 8$.
4. $a = -16$, $b = 5$.
5. $a = 115$, $b = -80$.

Info zu 5.: Hier liefert der erweiterte euklidische Algorithmus die Gleichung $23 \cdot 55 + (-16) \cdot 79 = 1$. Multipliziert man beide Seiten mit 5, so erhält man die neue Gleichung $115 \cdot 55 + (-80) \cdot 79 = 5$.

Inverse Elemente in $(\mathbb{Z}_n^*, \cdot_n)$

Um das inverse Element von $m \in \mathbb{Z}_n^*$ zu bestimmen, führt man den erweiterten euklidischen Algorithmus mit n und m aus. So erhält man ganze Zahlen a, b mit:

$$a \cdot m + b \cdot n = 1.$$

Nimmt man beide Seiten der Gleichung modulo n, so erhält man wegen

$$(a \cdot m + b \cdot n) \bmod n = (a \cdot m) \bmod n \quad = ((a \bmod n) \cdot m) \bmod n = (a \bmod n) \cdot_n m$$

die Gleichung

$$(a \bmod n) \cdot_n m = 1.$$

Daraus folgt: $m^{-1} = a \bmod n$.

Beispiel

Der Verknüpfungstafel auf Folie 1060 können wir entnehmen, dass 13 das multiplikative Invere von 7 in $\mathbb{Z}_{18}^*$ ist. Wir überprüfen dies mit dem erweiterten euklidischen Algorithmus.

r_i	s_i	t_i
18	–	-5
7	2	2
4	1	-1
3	1	1
1	5	0
0	–	–

Dann gilt $18 \cdot 2 + 7 \cdot (-5) = 1$ und daher:

$$7^{-1} = -5 \bmod 18 = 13.$$

Noch ein Beispiel

Gesucht ist das inverse Element 21^{-1} zu 21 bezüglich $\mathbb{Z}_{100}^*$. Aus dem Beispiel auf Folie 1067 haben wir folgende Ausführung des erweiterten euklidischen Algorithmus:

r_i	s_i	t_i
100	–	-19
21	4	4
16	1	-3
5	3	1
1	5	0
0	–	–

Dann gilt $100 \cdot 4 + 21 \cdot (-19) = 1$ und daher:

$$21^{-1} = -19 \bmod 100 = 81.$$

Infos

- Erinnerung: m besitzt genau dann ein multiplikatives Inverses bezüglich $\cdot_n$, wenn $\mathrm{ggT}(m, n) = 1$ gilt.
- Das multiplikative Inverse zu einer Zahl $m \in \mathbb{Z}_n^*$ wird immer an derselben Position in der Tabelle zu finden sein! :-)

Quizfragen

Gegeben seien folgende Zahlenpaare m, n mit $n \in \mathbb{N}$ und $m \in \mathbb{Z}_n^*$:

1. $m = 81,\ n = 128$.
2. $m = 73,\ n = 215$.
3. $m = 32,\ n = 91$.
4. $m = 41,\ n = 106$.
5. $m = 157,\ n = 432$.
6. $m = 73,\ n = 255$.

Was ist das Inverse m^{-1} zu m in $\mathbb{Z}_n^*$?

Antworten (ohne Rechnungen)

1. In $\mathbb{Z}_{128}^*$ gilt: $81^{-1} = 49$.
2. In $\mathbb{Z}_{215}^*$ gilt: $73^{-1} = 162$.
3. In $\mathbb{Z}_{91}^*$ gilt: $32^{-1} = 37$.
4. In $\mathbb{Z}_{106}^*$ gilt: $41^{-1} = 75$.
5. In $\mathbb{Z}_{432}^*$ gilt: $157^{-1} = 421$.
6. In $\mathbb{Z}_{255}^*$ gilt: $73^{-1} = 7$.

Eigenschaften von $(\mathbb{Z}_n^*, \cdot_n)$

Die Gruppe $\mathbb{Z}_n^*$ besitzt für jedes $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ folgende Eigenschaften:

- $|\mathbb{Z}_n^*| = \varphi(n)$
- Das neutrale Element ist die 1.
- Inverse Elemente bestimmt man mit dem erweitertem euklidischen Algorithmus
- $(\mathbb{Z}_n^*, \cdot_n)$ ist kommutativ, aber nicht immer zyklisch.
- Die Ordnung $\text{ord}(m)$ von $m \in \mathbb{Z}_n^*$ muss man leider durch systematisches Ausprobieren bestimmen (s. nächste Folie).

Für $n = 1$ ist $(\mathbb{Z}_n^*, \cdot_n)$ identisch zu $(\mathbb{Z}_n, +_n)$. Für die Eigenschaften siehe Folie 1040.

Beispiel

Wir bestimmen die Ordnung von 7 in $\mathbb{Z}_{22}^*$.

Wegen

$$|\mathbb{Z}_{22}^*| = \varphi(22) = 2^{1-1} \cdot (2-1) \cdot 11^{1-1} \cdot (11-1) = 10$$

muss nach Lagrange $\text{ord}(m) \in \{1, 2, 5, 10\}$ für alle $m \in \mathbb{Z}_{22}^*$ gelten.

$$\begin{array}{lcl} 7 \bmod 22 = 7 \neq 1 & \rightsquigarrow & \text{ord}(7) \neq 1 \\ 7^2 \bmod 22 = 5 \neq 1 & \rightsquigarrow & \text{ord}(7) \neq 2 \\ 7^5 \bmod 22 = 21 \neq 1 & \rightsquigarrow & \text{ord}(7) \neq 5 \end{array}$$

Daraus folgt sofort: $\text{ord}(7) = 10$.

Satz von Euler

Sind $a, n \in \mathbb{N}$ zueinander teilerfremd, dann gilt:

$$a^{\varphi(n)} \equiv_n 1.$$

Daraus folgt:

$$a^m \bmod n = a^{m \bmod \varphi(n)} \bmod n.$$

Beispiel

Da 3 und 4 teilerfremd sind, gilt:

$$3^{61} \bmod 4 = 3^{61 \bmod 2} \bmod 4 = 3^1 \bmod 4 = 3.$$

$\uparrow$

$\varphi(4) = 2$

Noch ein Beispiel

Auf

$$5^{73} \bmod 110$$

kann der Satz von Euler nicht direkt angewendet werden, da 5 und 110 nicht teilerfremd sind. Es gilt nämlich $\mathrm{ggT}(5, 110) = 5$.

Mithilfe der dritten Rechenregel auf Folie 1029 erhalten wir:

$$5^{73} \bmod 110 = 5 \cdot (5^{72} \bmod 22) = 5 \cdot (5^{72 \bmod 10} \bmod 22) = 5 \cdot (5^2 \bmod 22) = 5 \cdot 3 = 15.$$

$\varphi(22) = 10$

Quizfrage

Was ist $2^{308} \bmod 250$?

Antwort

$$2^{308} \bmod 250 = 2 \cdot (2^{307} \bmod 125) = 2 \cdot (2^{307 \bmod 100} \bmod 125) = 2 \cdot (2^7 \bmod 125) = 6.$$

$\uparrow$

$\varphi(125) = 100$

Themenübersicht

Rechnen mit Permutationen

Im Abschnitt *Relationen und Abbildungen* haben wir gelernt, was Permutationen sind (s. ab Folie 333). Im Abschnitt *Fundamentale Zählkoeffizienten* haben wir die Zyklenschreibweise für Permutationen kennengelernt (s. ab Folie 683).

Weil Permutationen Funktionen über eine Menge A sind, kann man Permutationen p_1, p_2 mit der Komposition von Funktionen $\circ$ verknüpfen und eine neue Permutation $p_3 = p_1 \circ p_2$ erhalten. Dann gilt für alle $x \in A$:

$$p_3(x) = (p_1 \circ p_2)(x) = p_1(p_2(x)).$$

Beispiele:

- Matrixschreibweise:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

- Zyklenschreibweise:

$$(1,3)(2)(4) \circ (1,4,2)(3) = (1,4,2,3)$$

Quizfragen

Gegeben seien folgende Permutationen p_1, p_2 und p_3 über $[6]$ in Zyklendarstellung:

1. $p_1 = (1,4)(2,6,3)(5)$,
2. $p_2 = (3,2,4,1,5,6)$,
3. $p_3 = (1,4)(2,5)(3,6)$.

Wie sehen die Umkehrfunktionen p_1^{-1}, p_2^{-1} und p_3^{-1} in Zyklendarstellung aus?

Antworten

Einfach die Zyklen umdrehen!

1. $p_1^{-1} = (1,4)(2,3,6)(5)$,
2. $p_2^{-1} = (1,4,2,3,6,5)$,
3. $p_3^{-1} = (1,4)(2,5)(3,6)$.

Bei den Zyklen wurde außerdem so lange geshiftet, bis die kleinste Zahl links steht. Das ist aber nicht nötig.

Quizfragen

Was sind die Ergebnisse in Zyklendarstellung folgender Kompositionen?

1. $(2,6)(3,1,4,5) \circ (1)(3,2,4,6)(5)$,
2. $(6,3,4)(2,5,1) \circ (6,2,4,3,1,5)$,
3. $(3,1)(5,4)(2,6) \circ (4,6)(2,3,1)(5)$.

Antworten

1. $(1, 4, 2, 5, 3, 6)$.
2. $(1)(2, 6, 5, 3)(4)$.
3. $(1, 6, 5, 4, 2)(3)$.

Quizfrage

Was ist

$$(1,3,5,4)(2,6) \circ (1,4)(2,5,6)(3) \circ (1,5,6)(2,4,3)$$

in Zyklenschreibweise?

Hinweis: Für alle Permutationen p, q, r über A und alle $x \in A$ gilt:

$$(p \circ q \circ r)(x) = p(q(r(x))).$$

D.h. die eingesetzte Zahl x „wandert von rechts nach links“.

Antwort

$$(1,3,5,4)(2,6) \circ (1,4)(2,5,6)(3) \circ (1,5,6)(2,4,3) = (1,2,3,4,5,6).$$

Quizfragen

Seien p und q Permutationen über $[6]$ mit

$$p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 5 & 6 & 1 & 4 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad q = (1,4,3)(2,6,5).$$

1. Was ist p in Zyklenschreibweise?
2. Was ist q in Matrixschreibweise?
3. Was ist $p \circ q$ in Matrixschreibweise?
4. Was ist $q \circ p$ in Zyklenschreibweise?
5. Was ist p^{-1} in Matrixschreibweise?
6. Was ist q^{-1} in Zyklenschreibweise?

Antworten

1. $p = (1,3,5)(2)(4,6)$.
2. $q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 6 & 1 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$.
3. $p \circ q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 4 & 3 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.
4. $q \circ p = (1)(2,6,3)(4,5)$.
5. $p^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 2 & 1 & 6 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.
6. $q^{-1} = (1,3,4)(2,5,6)$.

Symmetrische Gruppe

Seien $n \in \mathbb{N}$, S_n die Menge aller Permutationen über $[n]$ und $\circ$ die Komposition von Funktionen. Dann ist $(S_n, \circ)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ eine Gruppe.

Infos

- Weil wir S_n immer nur in Kombination mit $\circ$ betrachten werden, schreiben wir oft einfach S_n statt $(S_n, \circ)$.
- Obwohl $(S_n, \circ)$ Symmetrische Gruppe heißt, hat ihre Verknüpfungstafel nichts mit Symmetrie zutun. $(S_1, \circ)$ und $(S_2, \circ)$ sind zwar kommutativ, aber

$$(S_3, \circ), (S_4, \circ), (S_5, \circ), (S_6, \circ), (S_7, \circ), \ldots$$

alle nicht!

Beispiel

$(S_1, \circ)$ ist eine Gruppe mit

$$S_1 = \{(1)\}$$

und folgender Verknüpfungstafel:

$\circ$	(1)
(1)	(1)

Beispielsweise gilt: $(1) \circ (1) = (1)$.

Noch ein Beispiel

$(S_2, \circ)$ ist eine Gruppe mit

$$S_2 = \{(1)(2), (1,2)\}$$

und folgender Verknüpfungstafel:

$\circ$	$(1)(2)$	$(1,2)$
$(1)(2)$	$(1)(2)$	$(1,2)$
$(1,2)$	$(1,2)$	$(1)(2)$

Beispielsweise gilt: $(1,2) \circ (1,2) = (1)(2)$.

Ein letztes Beispiel

$(S_3, \circ)$ ist eine Gruppe mit

$$S_3 = \{(1)(2)(3), (1,2)(3), (1,3)(2), (1)(2,3), (1,2,3), (1,3,2)\}$$

und folgender Verknüpfungstafel:

$\circ$	$(1)(2)(3)$	$(1,2)(3)$	$(1,3)(2)$	$(1)(2,3)$	$(1,2,3)$	$(1,3,2)$
$(1)(2)(3)$	$(1)(2)(3)$	$(1,2)(3)$	$(1,3)(2)$	$(1)(2,3)$	$(1,2,3)$	$(1,3,2)$
$(1,2)(3)$	$(1,2)(3)$	$(1)(2)(3)$	$(1,3,2)$	$(1,2,3)$	$(1)(2,3)$	$(1,3)(2)$
$(1,3)(2)$	$(1,3)(2)$	$(1,2,3)$	$(1)(2)(3)$	$(1,3,2)$	$(1,2)(3)$	$(1)(2,3)$
$(1)(2,3)$	$(1)(2,3)$	$(1,3,2)$	$(1,2,3)$	$(1)(2)(3)$	$(1,3)(2)$	$(1,2)(3)$
$(1,2,3)$	$(1,2,3)$	$(1,3)(2)$	$(1)(2,3)$	$(1,2)(3)$	$(1,3,2)$	$(1)(2)(3)$
$(1,3,2)$	$(1,3,2)$	$(1)(2,3)$	$(1,2)(3)$	$(1,3)(2)$	$(1)(2)(3)$	$(1,2,3)$

Beispielsweise gilt: $(1,2,3) \circ (1,3)(2) = (1)(2,3)$.

Quizfrage

Wie viele Elemente enthält S_n für ein allgemeines $n \in \mathbb{N}$?

Antwort

$$|S_n| = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 1 = n!$$

Quizfragen

Seien $p = (1,2,3,4)$, $q = (1,3)(2,4)$, $r = (1,4,3,2)$ und $\mathrm{id} = (1)(2)(3)(4)$ vier Permutationen über [4] und $(G, \circ)$ eine Untergruppe der symmetrischen Gruppe $(S_4, \circ)$ mit $G = \{\mathrm{id}, p, q, r\}$.

1. Wie sieht die Verknüpfungstafel von $(G, \circ)$ aus?
2. Was ist das inverse Element a^{-1} von jedem $a \in G$?
3. Was ist die Ordnung $\mathrm{ord}(a)$ von jedem $a \in G$?
4. Ist $(G, \circ)$ zyklisch?

Antworten

1. Die Verknüpfungstafel von $(G, \circ)$ ist:

$\circ$	id	p	q	r
id	id	p	q	r
p	p	q	r	id
q	q	r	id	p
r	r	id	p	q

2. $$\mathrm{id}^{-1} = \mathrm{id}, \quad p^{-1} = r, \quad q^{-1} = q, \quad r^{-1} = p.$$

3. $$\mathrm{ord}(\mathrm{id}) = 1, \quad \mathrm{ord}(p) = 4, \quad \mathrm{ord}(q) = 2, \quad \mathrm{ord}(r) = 4.$$

4. Ja! p und r sind Erzeuger.

Eigenschaften von $(S_n, \circ)$

Die Gruppe S_n besitzt für jedes $n \in \mathbb{N}$ folgende Eigenschaften:

- $|S_n| = n!$.
- Das neutrale Element ist die Identitätsfunktion $\mathrm{id} = (1)(2)\dots(n)$.
- Das inverse Element p^{-1} von $p \in S_n$ ist einfach die Umkehrfunktion von p.
- $(S_n, \circ)$ ist kommutativ (abelsch) und zyklisch für $n = 1$ und $n = 2$, ansonsten ist sie weder kommutativ noch zyklisch.
- Die Ordnung $\mathrm{ord}(p)$ von einem Element $p \in S_n$ ist das kleinste gemeinsame Vielfache $\mathrm{kgV}\{l_1, l_2, \dots, l_k\}$ der Zyklenlängen $l_1, l_2, \dots, l_k$, z.B. gilt in S_9:

$$\mathrm{ord}\big(\underbrace{(1,7,4,3)}_{\text{Länge 4}}\underbrace{(2,8,6)}_{\text{Länge 3}}\underbrace{(5,9)}_{\text{Länge 2}}\big) = \mathrm{kgV}\{4,3,2\} = 12$$

Quizfragen

Welche Ordnung besitzen folgende Permutationen aus $(S_9, \circ)$?

1. $p = (4, 6, 2, 5)(3, 1, 9)(7, 8)$
2. $q = (1, 6)(5)(3, 8, 2)(4)(9, 7)$
3. $r = (3, 5, 7)(9, 1, 2)(8, 4, 6)$
4. $s = (5, 9)(1, 3)(2, 7)(4, 6, 8)$

Antworten

1. $\mathrm{ord}(p) = \mathrm{kgV}\{4, 3, 2\} = 12$.
2. $\mathrm{ord}(q) = \mathrm{kgV}\{2, 1, 3, 1, 2\} = 6$.
3. $\mathrm{ord}(r) = \mathrm{kgV}\{3, 3, 3\} = 3$.
4. $\mathrm{ord}(s) = \mathrm{kgV}\{2, 2, 2, 3\} = 6$.

Quizfragen

1. Für welche Permutation $p \in S_9$ gilt $\mathrm{ord}(p) = 15$?
2. Für welche Permutation $q \in S_9$ gilt $\mathrm{ord}(q) = 9$?
3. Für welche Permutation $r \in S_9$ gilt $\mathrm{ord}(r) = 5$?
4. Für welche Permutation $s \in S_9$ gilt $\mathrm{ord}(s) = 14$?

Gib jeweils ein Beispiel an.

Antworten

1. p muss Zyklen der Längen 1, 3 und 5 haben, z.B.

$$p = (1)(2,3,4)(5,6,7,8,9).$$

2. q muss einen Zyklus der Länge 9 haben, z.B.

$$q = (1,2,3,4,5,6,7,8,9).$$

3. r muss vier Zyklen der Länge 1 und einen der Länge 5 haben, z.B.

$$r = (1)(2)(3)(4)(5,6,7,8,9).$$

4. s muss einen Zyklus der Länge 2 und einen der Länge 7 haben, z.B.

$$s = (1,2)(3,4,5,6,7,8,9).$$

Überblick*: Eigenschaften der Gruppen $(\mathbb{Z}_n, +_n)$, $(\mathbb{Z}_n^*, \cdot_n)$ und $(S_n, \circ)$

	$(\mathbb{Z}_n, +_n)$	$(\mathbb{Z}_n^*, \cdot_n)$	$(S_n, \circ)$
Gruppenordnung	n	$\varphi(n)$	$n!$
Neutrales Element	0	1	$\mathrm{id} = (1)(2)\ldots(n)$
Inversenbildung	durch Negation und Modulobildung $m^{-1} = -m \bmod n$	mit dem erweiterten euklidischen Algorithmus: $m^{-1} = a \bmod n$	durch Bildung der Umkehrfunktion p^{-1} von p
Kommutativ	immer	immer	nur falls $n \leq 2$
Zyklisch	immer	manchmal	nur falls $n \leq 2$
Elementenordnung	$\mathrm{ord}(m) = \frac{n}{\mathrm{ggT}(m,n)}$	ausprobieren	$\mathrm{ord}(p) = \mathrm{kgV}\{l_1, l_2, \ldots, l_k\}$

*Siehe Folien 1040, 1078 und 1104.

Themenübersicht

Inneres Produkt

Seien $(A, \circ)$ und $(B, \bullet)$ beliebige Algebren. Dann heißt

$$(A, \circ) \times (B, \bullet) := (A \times B, \circ \times \bullet)$$

mit

$$(a, b)(\circ \times \bullet)(c, d) = (a \circ c, b \bullet d)$$

das innere Produkt (oder direkte Produkt) aus $(A, \circ)$ und $(B, \bullet)$.

Beispiel

Seien $(A, \circ)$ und $(B, \bullet)$ mit $A = \{a, b, c\}$, $B = \{d, e\}$ und:

$(A, \circ)$:

$\circ$	a	b	c
a	a	b	c
b	b	c	a
c	c	a	b

$(B, \bullet)$:

$\bullet$	d	e
d	d	e
e	e	d

Dann besitzt $(A, \circ) \times (B, \bullet)$ folgende Verknüpfungstafel:

$\circ \times \bullet$	(a,d)	(a,e)	(b,d)	(b,e)	(c,d)	(c,e)
(a,d)	(a,d)	(a,e)	(b,d)	(b,e)	(c,d)	(c,e)
(a,e)	(a,e)	(a,d)	(b,e)	(b,d)	(c,e)	(c,d)
(b,d)	(b,d)	(b,e)	(c,d)	(c,e)	(a,d)	(a,e)
(b,e)	(b,e)	(b,d)	(c,e)	(c,d)	(a,e)	(a,d)
(c,d)	(c,d)	(c,e)	(a,d)	(a,e)	(b,d)	(b,e)
(c,e)	(c,e)	(c,d)	(a,e)	(a,d)	(b,e)	(b,d)

z.B.: $(b,d)(\circ \times \bullet)(c,e) = (b \circ c, d \bullet e) = (a,e)$

Mehr Beispiele

Seien $(\mathbb{Z}_2, +_2)$ und $(\mathbb{Z}_2, \cdot_2)$ mit folgenden Verknüpfungstafeln:

$(\mathbb{Z}_2, +_2)$:

$+_2$	0	1
0	0	1
1	1	0

$(\mathbb{Z}_2, \cdot_2)$:

$\cdot_2$	0	1
0	0	0
1	0	1

- $(\mathbb{Z}_2, +_2) \times (\mathbb{Z}_2, \cdot_2)$ besitzt folgende Verknüpfungstafel:

$+_2 \times \cdot_2$	$(0,0)$	$(0,1)$	$(1,0)$	$(1,1)$
$(0,0)$	$(0,0)$	$(0,0)$	$(1,0)$	$(1,0)$
$(0,1)$	$(0,0)$	$(0,1)$	$(1,0)$	$(1,1)$
$(1,0)$	$(1,0)$	$(1,0)$	$(0,0)$	$(0,0)$
$(1,1)$	$(1,0)$	$(1,1)$	$(0,0)$	$(0,1)$

Eigenschaften des inneren Produkts $(A, \circ) \times (B, \bullet)$

Für Algebren $(A, \circ)$ und $(B, \bullet)$ gilt immer:

- $(A, \circ) \times (B, \bullet)$ besitzt $|G| \cdot |T|$ Elemente.
- $(A, \circ) \times (B, \bullet)$ ist nur dann assoziativ, wenn A und B jeweils assoziativ sind.
- $(A, \circ) \times (B, \bullet)$ hat nur dann ein neutrales Element (e_A, e_B), wenn A und B jeweils neutrale Elemente $e_A \in G$ und $e_B \in T$ haben.
- In $(A, \circ) \times (B, \bullet)$ haben alle Elemente $(x, y) \in G \times T$ ein Inverses $(x, y)^{-1} = (x^{-1}, y^{-1})$ nur, wenn jedes $x \in G$ ein Inverses x^{-1} in A und jedes $y \in T$ ein Inverses y^{-1} in B besitzen.
- $(A, \circ) \times (B, \bullet)$ ist nur dann kommutativ, wenn A und B jeweils kommutativ sind.

Quizfrage

Ist die Aussage

„Für beliebige zyklische Gruppen A und B ist auch $(A, \circ) \times (B, \bullet)$ zyklisch“

wahr oder falsch?

Antwort

Falsch! $(\mathbb{Z}_2, +_2)$ ist zyklisch ($\text{ord}(1) = 2 = |\mathbb{Z}_2|$), aber $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, +_2 \times +_2)$ nicht. Es gilt nämlich $|\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2| = 4$, aber kein Element hat Ordnung 4:

$+_2 \times +_2$	$(0,0)$	$(0,1)$	$(1,0)$	$(1,1)$
$(0,0)$	$(0,0)$	$(0,1)$	$(1,0)$	$(1,1)$
$(0,1)$	$(0,1)$	$(0,0)$	$(1,1)$	$(1,0)$
$(1,0)$	$(1,0)$	$(1,1)$	$(0,0)$	$(0,1)$
$(1,1)$	$(1,1)$	$(1,0)$	$(0,1)$	$(0,0)$

$\text{ord}((0,0)) = 1$ $\text{ord}((0,1)) = 2$ $\text{ord}((1,0)) = 2$ $\text{ord}((1,1)) = 2$

Themenübersicht

Isomorphismus bei Algebren

Für beliebige Algebren $(A, \circ)$ und $(B, \bullet)$ gilt $(A, \circ) \cong (B, \bullet)$ genau dann, wenn es eine bijektive Funktion $h : A \to B$ mit der Homomorphieeigenschaft

$$\forall x, y \in A : h(x \circ y) = h(x) \bullet h(y)$$

gibt.

Eine solche Funktion h wird Isomorphismus genannt.

Infos

- Für $(A, \circ) \cong (B, \bullet)$ sagen wir „$(A, \circ)$ und $(B, \bullet)$ sind isomorph zueinander“.
- Ein Homomorphismus ist eine Verallgemeinerung des Isomorphismus, bei dem h nicht notwendigerweise bijektiv sein muss.

Info

Intuitiv heißt das, dass $(A, \circ)$ und $(B, \bullet)$ zwar unterschiedliche Objekte mit unterschiedlichen Namen sind, aber dieselbe „Struktur“ haben und somit auch dieselben Eigenschaften:

$(A, \circ)$:

$\circ$	$\cdots$	y	$\cdots$
$\vdots$		$\vdots$	
x	$\cdots$	$x \circ y$	$\cdots$
$\vdots$		$\vdots$	

$(B, \bullet)$:

$\bullet$	$\cdots$	$h(y)$	$\cdots$
$\vdots$		$\vdots$	
$h(x)$	$\cdots$	$h(x \circ y)$	$\cdots$
$\vdots$		$\vdots$	

D.h. man kann die linke Verknüpfungstafel nehmen, die Elemente in ihr nach h unbenennen und man würde die rechte Tabelle erhalten (mit eventuellen Zeilen- bzw. Spaltenvertauschungen).

Beispiel

Seien $(A, \circ)$ und $(B, \bullet)$ zwei Algebren mit $A = \{a, b, c\}$ und $B = \{r, s, t\}$ und $h : \{a, b, c\} \to \{r, s, t\}$ eine Funktion wie folgt:

$(A, \circ)$:

$\circ$	a	b	c
a	a	b	c
b	b	c	a
c	c	a	b

$(B, \bullet)$:

$\bullet$	r	s	t
r	t	r	s
s	r	s	t
t	s	t	r

h :

x	$h(x)$
a	s
b	r
c	t

h ist ein Isomorphismus zwischen $(A, \circ)$ und $(B, \bullet)$. Intuitiv heißt das, dass wir durch die Umbenennung h der Elemente in $(A, \circ)$ wir genau $(B, \bullet)$ erhalten. D.h., dass $(A, \circ)$ und $(B, \bullet)$ bis auf Unbenennung der Elemente gleich sind (dieselbe „Struktur“ haben).

$\circ$	a	b	c
a	a	b	c
b	b	c	a
c	c	a	b

umbenennen $\rightsquigarrow$

$\bullet$	s	r	t
s	s	r	t
r	r	t	s
t	t	s	r

umordnen $\rightsquigarrow$

$\bullet$	r	s	t
r	t	r	s
s	r	s	t
t	s	t	r

Formal muss die Homomorphieeigenschaft gezeigt werden. Wir müssen also

$$h(x \circ y) = h(x) \bullet h(y)$$

für alle $x, y \in \{a, b, c\}$ zeigen. Weil $(A, \circ)$ und $(B, \bullet)$ beide endlich sind kann man einfach alle $3^2 = 9$ Gleichungen getrennt überprüfen.

$(A, \circ)$:

$\circ$	a	b	c
a	a	b	c
b	b	c	a
c	c	a	b

$(B, \bullet)$:

$\bullet$	r	s	t
r	t	r	s
s	r	s	t
t	s	t	r

h :

x	$h(x)$
a	s
b	r
c	t

Beweis mit Brute Force:

$$
\begin{aligned}
h(a \circ a) = h(a) &= s = s \bullet s = h(a) \bullet h(a) \\
h(a \circ b) = h(b) &= r = s \bullet r = h(a) \bullet h(b) \\
h(a \circ c) = h(c) &= t = s \bullet t = h(a) \bullet h(c) \\
h(b \circ a) = h(b) &= r = r \bullet s = h(b) \bullet h(a) \\
h(b \circ b) = h(c) &= t = r \bullet r = h(b) \bullet h(b) \\
h(b \circ c) = h(a) &= s = r \bullet t = h(b) \bullet h(c) \\
h(c \circ a) = h(c) &= t = t \bullet s = h(c) \bullet h(a) \\
h(c \circ b) = h(a) &= s = t \bullet r = h(c) \bullet h(b) \\
h(c \circ c) = h(b) &= r = t \bullet t = h(c) \bullet h(c)
\end{aligned}
$$

Noch ein Beispiel

Die Gruppen $\mathbb{Z}_8^*$ und $\mathbb{Z}_{12}^*$ besitzen folgende Verknüpfungstafeln:

$\mathbb{Z}_8^*$:

$\cdot_8$	1	3	5	7
1	1	3	5	7
3	3	1	7	5
5	5	7	1	3
7	7	5	3	1

$\mathbb{Z}_{12}^*$:

$\cdot_{12}$	1	5	7	11
1	1	5	7	11
5	5	1	11	7
7	7	11	1	5
11	11	7	5	1

Hier erkennt man sofort, dass folgende Funktion $h : \mathbb{Z}_8^* \to \mathbb{Z}_{12}^*$ ein Isomorphismus ist:

$$h(1) = 1, \quad h(3) = 5, \quad h(5) = 7, \quad h(7) = 11.$$

Letztes Beispiel

Für die Gruppen $(\mathbb{R}, +)$ und $(\mathbb{R}^+, \cdot)$ gilt $(\mathbb{R}, +) \cong (\mathbb{R}^+, \cdot)$, d.h. sie sind isomorph zueinander. Ein möglicher Isomorphismus ist $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ mit:

$$h(x) = e^x$$

h ist (offensichtlich ;-)) bijektiv und es gilt für beliebige $x, y \in \mathbb{R}$:

$$h(x + y) = e^{x+y} = e^x \cdot e^y = h(x) \cdot h(y)$$

□

Infos

- Es ist einfach zu beweisen, dass eine gegebene Funktion h ein Isomorphismus ist.
- Am schwierigsten ist es aber, einen Isomorphismus selber zu finden.

Rezept

Frage: Wie kann man ein Gruppenisomorphismus finden?
Methode: Bei Gruppenisomorphismen h gilt folgende Implikation:

$$h(x) = y \implies \text{ord}(x) = \text{ord}(y)$$

Daraus entsteht folgende Strategie:

1. Liste die Ordnungen aller Elemente beider Gruppen auf.
2. Verbinde diejenigen Elemente, deren Ordnung nur einmal vorkommen (z.B. neutrale Elemente).
3. überlege, wie der Rest aussehen könnte (eventuell durch ausprobieren!) .
4. Beweise, ob die entstandene Funktion tatsächlich ein Isomorphismus ist.

Info

Bei der Konstruktion von Isomorphismen gibt es drei wichtige Spezialfälle, die für uns in DS völlig ausreichend sind:

- Sind die Gruppen unterschiedlich groß, dann können sie nicht isomorph sein.
- Stellt man fest, dass die Ordnungen beider Gruppen anders sind, dann sind sie automatisch nicht isomorph.
- Sind beide Gruppen zyklisch, so kann man einen beliebigen Erzeuger der einen Gruppe mit einem beliebigen Erzeuger der anderen verbinden und sich den Rest systematisch konstruieren :-)

Beispiel

Für die Gruppen $\mathbb{Z}_6$ und $\mathbb{Z}_7^*$ gilt:

$\mathbb{Z}_6$:

x	0	1	2	3	4	5
$\text{ord}(x)$	1	6	3	2	3	6

$\mathbb{Z}_7^*$:

x	1	2	3	4	5	6
$\text{ord}(x)$	1	3	6	3	6	2

$\mathbb{Z}_6$ und $\mathbb{Z}_7^*$ sind beide zyklisch. Mögliche Erzeuger sind $1 \in \mathbb{Z}_6$ und $3 \in \mathbb{Z}_7^*$.
$\mathbb{Z}_6$ wird wie folgt von 1 erzeugt:

$$1 \xrightarrow{+_6 1} 2 \xrightarrow{+_6 1} 3 \xrightarrow{+_6 1} 4 \xrightarrow{+_6 1} 5 \xrightarrow{+_6 1} 0$$

Analog wird $\mathbb{Z}_7^*$ wird wie folgt von 3 erzeugt:

$$3 \xrightarrow{\cdot_7 3} 2 \xrightarrow{\cdot_7 3} 6 \xrightarrow{\cdot_7 3} 4 \xrightarrow{\cdot_7 3} 5 \xrightarrow{\cdot_7 3} 1$$

Wir setzen also z.B. $h : \mathbb{Z}_6 \to \mathbb{Z}_7^*$ mit $h(1) = 3$ und berechnen die restlichen Werte von h systematisch:

$$
\begin{aligned}
h(2) &= h(1 +_6 1) = h(1) \cdot_7 h(1) = 3 \cdot_7 3 = 2 \\
h(3) &= h(1 +_6 2) = h(1) \cdot_7 h(2) = 3 \cdot_7 2 = 6 \\
h(4) &= h(1 +_6 3) = h(1) \cdot_7 h(3) = 3 \cdot_7 6 = 4 \\
h(5) &= h(1 +_6 4) = h(1) \cdot_7 h(4) = 3 \cdot_7 4 = 5 \\
h(0) &= h(1 +_6 5) = h(1) \cdot_7 h(5) = 3 \cdot_7 5 = 1
\end{aligned}
$$

Man kann an folgendem Diagramm sehr schön erkennen wieso das funktioniert:

$$
\begin{array}{cccccccccccc}
 & 1 & \xrightarrow{+_6 1} & 2 & \xrightarrow{+_6 1} & 3 & \xrightarrow{+_6 1} & 4 & \xrightarrow{+_6 1} & 5 & \xrightarrow{+_6 1} & 0 \\
h: & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & 3 & \xrightarrow{\cdot_7 3} & 2 & \xrightarrow{\cdot_7 3} & 6 & \xrightarrow{\cdot_7 3} & 4 & \xrightarrow{\cdot_7 3} & 5 & \xrightarrow{\cdot_7 3} & 1
\end{array}
$$

Seien $S_2 = \{\mathrm{id}, p\}$ mit $\mathrm{id} = (1)(2)$ und $p = (1,2)$, $\leftrightarrow\colon \mathbb{B} \times \mathbb{B} \to \mathbb{B}$ mit $\mathbb{B} = \{0,1\}$ und folgende Verknüpfungstafeln von $(S_2, \circ)$ und $(\mathbb{B}, \leftrightarrow)$ gegeben:

$(S_2, \circ)$:

$\circ$	id	p
id	id	p
p	p	id

$(\mathbb{B}, \leftrightarrow)$:

$\leftrightarrow$	0	1
0	1	0
1	0	1

Wieso sind $(S_2, \circ)$ und $(\mathbb{B}, \leftrightarrow)$ isomorph zueinander?

Überlege dir, wie ein Isomorphismus $h : S_2 \to \mathbb{B}$ aussehen könnte und überprüfe die Homomorphieeigenschaft von h:

$$\begin{aligned} h(\mathrm{id} \circ \mathrm{id}) &= h(\mathrm{id}) \leftrightarrow h(\mathrm{id}) \\ h(\mathrm{id} \circ p) &= h(\mathrm{id}) \leftrightarrow h(p) \\ h(p \circ \mathrm{id}) &= h(p) \leftrightarrow h(\mathrm{id}) \\ h(p \circ p) &= h(p) \leftrightarrow h(p) \end{aligned}$$

Antwort

Es gibt nur zwei bijektive Funktionen $h : S_2 \to \mathbb{B}$:

$$h(\mathrm{id}) = 0, h(p) = 1 \quad \text{und} \quad h(\mathrm{id}) = 1, h(p) = 0.$$

Weil id und 1 jeweils die neutralen Elemente sind (bzw. p und 0 jeweils die Erzeuger), entscheiden wir uns für die zweite Variante.

Beweis der Homomorphieeigenschaft:

$$\begin{array}{rcccccccl}
h(\mathrm{id} \circ \mathrm{id}) & = & h(\mathrm{id}) & = & 1 & = & 0 \leftrightarrow 0 & = & h(\mathrm{id}) \leftrightarrow h(\mathrm{id}) \quad \checkmark \\
h(\mathrm{id} \circ p) & = & h(p) & = & 0 & = & 0 \leftrightarrow 1 & = & h(\mathrm{id}) \leftrightarrow h(p) \quad \checkmark \\
h(p \circ \mathrm{id}) & = & h(p) & = & 0 & = & 1 \leftrightarrow 0 & = & h(p) \leftrightarrow h(\mathrm{id}) \quad \checkmark \\
h(p \circ p) & = & h(\mathrm{id}) & = & 1 & = & 1 \leftrightarrow 1 & = & h(p) \leftrightarrow h(p) \quad \checkmark
\end{array}$$

Info: Wir dürfen hier beispielsweise „$1 = 0 \leftrightarrow 0$“ statt „$\mathrm{true} \equiv \mathrm{false} \leftrightarrow \mathrm{false}$“ schreiben, weil wir $\leftrightarrow$ als Operation $\leftrightarrow\colon \mathbb{B} \times \mathbb{B} \to \mathbb{B}$ über $\mathbb{B} = \{0, 1\}$ definiert haben.

Quizfrage

Sei $\otimes : \mathbb{B} \times \mathbb{B} \to \mathbb{B}$ mit $\mathbb{B} = \{0, 1\}$ und folgende Verknüpfungstafeln von $(\mathbb{Z}_2, +_2)$ und $(\mathbb{B}, \otimes)$ gegeben:

$(\mathbb{Z}_2, +_2)$:

$+_2$	0	1
0	0	1
1	1	0

$(\mathbb{B}, \otimes)$:

$\otimes$	0	1
0	0	1
1	1	0

Wieso sind $(\mathbb{Z}_2, +_2)$ und $(\mathbb{B}, \otimes)$ isomorph zueinander?

Überlege dir wieder, analog zur letzten Quizfrage, wie ein Isomorphismus $h : \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{B}$ aussehen könnte und überprüfe die Homomorphieeigenschaft von h.

Antwort

Es gibt nur zwei bijektive Funktionen $h : \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{B}$:

$$h(0) = 0, h(1) = 1 \quad \text{und} \quad h(0) = 1, h(1) = 0.$$

Weil 0 und 0 jeweils die neutralen Elemente sind (bzw. 1 und 1 jeweils die Erzeuger), entscheiden wir uns für die erste Variante.

Beweis der Homomorphieeigenschaft:

$$\begin{array}{lllllllll} h(0 +_2 0) & = & h(0) & = & 0 & = & 0 \otimes 0 & = & h(0) \otimes h(0) \quad \checkmark \\ h(0 +_2 1) & = & h(1) & = & 1 & = & 0 \otimes 1 & = & h(0) \otimes h(1) \quad \checkmark \\ h(1 +_2 0) & = & h(1) & = & 1 & = & 1 \otimes 0 & = & h(1) \otimes h(0) \quad \checkmark \\ h(1 +_2 1) & = & h(0) & = & 0 & = & 1 \otimes 1 & = & h(1) \otimes h(1) \quad \checkmark \end{array}$$

Info: Auch hier dürfen wir beispielsweise „$0 = 0 \otimes 0$“ statt „$\text{false} \equiv \text{false} \otimes \text{false}$“ schreiben, weil wir $\otimes$ als Operation $\otimes : \mathbb{B} \times \mathbb{B} \to \mathbb{B}$ über $\mathbb{B} = \{0, 1\}$ definiert haben.

Quizfrage

Seien $(G, \circ)$ und $(H, \bullet)$ zwei Gruppen mit folgenden Verknüpfungstafeln:

G :

$\circ$	1	2	3
1	2	3	1
2	3	1	2
3	1	2	3

H :

$\bullet$	4	5	6
4	6	4	5
5	4	5	6
6	5	6	4

Es gilt $(G, \circ) \cong (H, \bullet)$. Welche Isomorphismen zwischen $(G, \circ)$ und $(H, \bullet)$ gibt es?

Antwort

Die Erzeugnistafeln beider Gruppen sind:

$(G, \circ)$:

a	$\langle a \rangle$	$\mathrm{ord}(a)$
1	$\{1, 2, 3\}$	3
2	$\{2, 1, 3\}$	3
3	$\{3\}$	1

$(H, \bullet)$:

a	$\langle a \rangle$	$\mathrm{ord}(a)$
4	$\{4, 6, 5\}$	3
5	$\{5\}$	1
6	$\{6, 4, 5\}$	3

Dies ergibt, analog zum Beispiel auf Folie 1128, folgende Isomorphismen $h_1, h_2 : \{1, 2, 3\} \to \{4, 5, 6\}$:

$$h_1(1) = 4, h_1(2) = 6, h_1(3) = 5 \quad \text{und} \quad h_2(1) = 6, h_2(2) = 4, h_2(3) = 5.$$

Quizfrage

Welche Isomorphismen gibt es zwischen $\mathbb{Z}_6$ und $\mathbb{Z}_9^*$?

Antwort

Die Erzeugnistafeln beider Gruppen sind:

$\mathbb{Z}_6$:

a	$\langle a \rangle$	$\mathrm{ord}(a)$
0	$\{0\}$	1
1	$\{1,2,3,4,5,0\}$	6
2	$\{2,4,0\}$	3
3	$\{3,0\}$	2
4	$\{4,2,0\}$	3
5	$\{5,4,3,2,1,0\}$	6

$\mathbb{Z}_9^*$:

a	$\langle a \rangle$	$\mathrm{ord}(a)$
1	$\{1\}$	1
2	$\{2,4,8,7,5,1\}$	6
4	$\{4,7,1\}$	3
5	$\{5,7,8,4,2,1\}$	6
7	$\{7,4,1\}$	3
8	$\{8,1\}$	2

Dies ergibt, analog zum Beispiel auf Folie 1128, folgende Isomorphismen $h_1, h_2 : \mathbb{Z}_6 \to \mathbb{Z}_9^*$:

$$h_1(0) = 1, h_1(1) = 2, h_1(2) = 4, h_1(3) = 8, h_1(4) = 7, h_1(5) = 5.$$

und

$$h_2(0) = 1, h_2(1) = 5, h_2(2) = 7, h_2(3) = 8, h_2(4) = 4, h_2(5) = 2.$$

Quizfrage

Gegeben seien folgende Gruppen:

$$\mathbb{Z}_4, \quad \mathbb{Z}_6, \quad \mathbb{Z}_5^*, \quad \mathbb{Z}_7^*, \quad \mathbb{Z}_8^*, \quad S_3.$$

1. Wie viele Elemente besitzt jede Gruppe?
2. Welche Gruppen sind zyklisch?
3. Welche Gruppen sind isomorph zueinander und welche nicht?

1. Es gilt $\mathbb{Z}_5^* = \{1, 2, 3, 4\}$, $\mathbb{Z}_7^* = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ und $\mathbb{Z}_8^* = \{1, 3, 5, 7\}$. Daraus folgt:

$$|\mathbb{Z}_4| = 4, \quad |\mathbb{Z}_6| = 6, \quad |\mathbb{Z}_5^*| = 4, \quad |\mathbb{Z}_7^*| = 6, \quad |\mathbb{Z}_8^*| = 4, \quad |S_3| = 3! = 6.$$

2. $\mathbb{Z}_n$ ist für jedes $n \in \mathbb{N}$ zyklisch. S_n ist nur für $n \leq 2$ zyklisch. Für $\mathbb{Z}_5^*$, $\mathbb{Z}_7^*$ und $\mathbb{Z}_8^*$ gilt:

$\mathbb{Z}_5^*$:

a	ord(a)
1	1
2	4
3	4
4	2

$\mathbb{Z}_7^*$:

a	ord(a)
1	1
2	3
3	6
4	3
5	6
6	2

$\mathbb{Z}_8^*$:

a	ord(a)
1	1
3	2
5	2
7	2

Somit sind nur $\mathbb{Z}_4$, $\mathbb{Z}_6$, $\mathbb{Z}_5^*$ und $\mathbb{Z}_7^*$ zyklisch und $\mathbb{Z}_8^*$ und S_3 nicht.

3. Für die Gruppen mit 4 Elementen gilt

$$\mathbb{Z}_4 \cong \mathbb{Z}_5^* \ncong \mathbb{Z}_8^*,$$

da $\mathbb{Z}_4$ und $\mathbb{Z}_5^*$ zyklisch sind und $\mathbb{Z}_8^*$ nicht.

Für die Gruppen mit 6 Elementen gilt:

$$\mathbb{Z}_6 \cong \mathbb{Z}_7^* \ncong S_3,$$

da $\mathbb{Z}_6$ und $\mathbb{Z}_7^*$ zyklisch sind und S_3 nicht.

Keine der 4-elementigen Gruppen ist isomorph zu einer der 6-elementigen Gruppen, weil isomorphe Gruppen gleich viele Elemente besitzen müssen.

Wichtige Aussagen zur Isomoprhie von Gruppen

1. Jede zyklische Gruppe $(G, \circ)$ mit $|G| = \infty$ ist isomorph zu $(\mathbb{Z}, +)$.
2. Jede zyklische Gruppe $(G, \circ)$ mit $|G| = n$ ist isomorph zu $(\mathbb{Z}_n, +_n)$.
3. Zwei zyklische Gruppen mit gleich vielen Elementen sind isomorph zueinander.
4. Alle zyklischen Gruppen sind automatisch auch kommutativ, da $(\mathbb{Z}, +)$ und $(\mathbb{Z}_n, +_n)$ beide abelsch (kommutativ) sind.
5. Sind $(G, \circ)$ und $(H, \bullet)$ zwei isomorphe Gruppen und $h : G \to H$ ein Isomorphismus, dann gilt:

$$
\begin{array}{lcl}
h(a) = b & \Longrightarrow & \operatorname{ord}(a) = \operatorname{ord}(b), \\
h(a) = b & \Longrightarrow & h(a^{-1}) = b^{-1}, \\
(G, \circ) \text{ abelsch} & \Longrightarrow & (H, \bullet) \text{ abelsch}, \\
(G, \circ) \text{ zyklisch} & \Longrightarrow & (H, \bullet) \text{ zyklisch}.
\end{array}
$$

1. Gibt es eine Gruppe mit 724 Elementen?
2. Gibt es eine kommutative Gruppe mit 535 Elementen?
3. Gibt es eine nicht-kommutative Gruppe mit 6 Elementen?
4. Gibt es eine nicht-kommutative Gruppe mit 7 Elementen?
5. Gibt es eine nicht-kommutative Gruppe mit 12 Elementen?
6. Gibt es eine zyklische Gruppe mit 793 Elementen?
7. Gibt es eine nicht-zyklische Gruppe mit 24 Elementen?
8. Gibt es eine zyklische Gruppe, die nicht kommutativ ist?
9. Gibt es nicht-isomorphe Gruppen mit 23 Elementen?
10. Gibt es nicht-isomorphe Gruppen mit 24 Elementen?
11. Gibt es eine Gruppe mit 21 Elementen, die ein Element mit Ordnung 5 enthält?
12. Gibt es eine Gruppe mit 36 Elementen, die eine Untergruppe mit 8 Elementen besitzt?

Antworten

1. Ja! $\mathbb{Z}_{724}$. Erinnerung: $\mathbb{Z}_n$ ist für alle $n \in \mathbb{N}$ eine Gruppe.
2. Ja! $\mathbb{Z}_{535}$. Erinnerung: $\mathbb{Z}_n$ ist für alle $n \in \mathbb{N}$ eine kommutative Gruppe.
3. Ja! S_3.
4. Nein! 7 ist prim und somit ist jede Gruppe mit 7 Elementen zyklisch und kommutativ.
5. Ja! Das innere Produkt $S_3 \times \mathbb{Z}_2$ besitzt $|S_3 \times \mathbb{Z}_2| = 6 \cdot 2 = 12$ Elemente und ist nicht kommutativ, da S_3 es nicht ist.
6. Ja! $\mathbb{Z}_{793}$. Erinnerung: $\mathbb{Z}_n$ ist für alle $n \in \mathbb{N}$ eine zyklische Gruppe.

7. Ja! S_4. Erinnerung: S_n besitzt $n!$ Elemente und ist nur für $n \leq 2$ zyklisch und kommutativ. Für $n \geq 3$ ist S_n weder kommutativ noch zyklisch.
8. Nein! Jede Zyklische Gruppe ist kommutativ.
9. Nein! 23 ist prim, d.h. alle Gruppen mit 23 Elementen sind zyklisch und somit isomorph zueinander.
10. Ja! $\mathbb{Z}_{24}$ und S_4 haben beide 24 Elemente, aber sind sind nicht isomorph zueinander, weil $\mathbb{Z}_{24}$ zyklisch ist und S_4 nicht.
11. Nein! 5 teilt nicht die 21.
12. Nein! 8 teilt nicht 36.

Themenübersicht

Themenübersicht

Ringe

Eine Algebra $(A, \oplus, \odot)$ mit zwei Operatoren heißt Ring, falls folgendes gilt:

1. $(A, \oplus)$ ist eine kommutative Gruppe mit neutralem Element $0 \in A$ (additive Gruppe)
2. $(A, \odot)$ ist ein Monoid mit neutralem Element $1 \in A$ (multiplikatives Monoid)
3. $\oplus$ und $\odot$ sind distributiv, d.h. für alle $a, b, c \in A$ gilt:

$$(a \oplus b) \odot c = (a \odot c) \oplus (b \odot c)$$
$$a \odot (b \oplus c) = (a \odot b) \oplus (a \odot c)$$

Falls $(A, \odot)$ ein kommutatives Monoid ist, dann nennt man $(A, \oplus, \odot)$ einen kommutativen Ring.

Körper

Eine Algebra $(A, \oplus, \odot)$ mit zwei Operatoren heißt Körper, falls folgendes gilt:

1. $(A, \oplus)$ ist eine kommutative Gruppe mit neutralem Element $0 \in A$ (additive Gruppe)
2. $(A \setminus \{0\}, \odot)$ ist eine kommutative Gruppe mit neutralem Element $1 \in A$ (multiplikative Gruppe)
3. $\oplus$ und $\odot$ sind distributiv, d.h. für alle $a, b, c \in A$ gilt:

$$(a \oplus b) \odot c = (a \odot c) \oplus (b \odot c)$$

Info

Weil $\odot$ kommutativ ist, braucht man bei Körpern nur eine Distributivität. Die andere folgt aus ihr ;-)

Hierarchie

Es gilt:

$$(A, \oplus, \odot) \text{ Körper} \implies (A, \oplus, \odot) \text{ Ring} \implies (A, \oplus, \odot) \text{ Algebra}$$

d.h. jeder Körper ist ein Ring und jeder Ring ist eine Algebra.

Infos

- A kann eine beliebige Menge sein, endlich oder unendlich
- $\oplus$ und $\odot$ können beliebige Operatoren sein.
- 0 und 1 sind nicht unbedingt die Zahlen 0 und 1.
- Man nennt die 0 Nullelement und die 1 Einselement.
- $-a$ ist das additive Inverse von a, entsprechend ist a^{-1} das multiplikative Inverse von a.
- Möchte man verdeutlichen, welche Elemente neutrale Elemente sind, dann kann man auch $(A, \oplus, \odot, 0, 1)$ statt $(A, \oplus, \odot)$ schreiben.

Beispiele

- Der bekannteste unendliche Ring ist:

$$(\mathbb{Z}, +, \cdot).$$

- Die bekanntesten unendlichen Körper sind:

$$(\mathbb{Q}, +, \cdot), \quad (\mathbb{R}, +, \cdot), \quad (\mathbb{C}, +, \cdot).$$

Quizfrage

Wieso ist $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ kein Körper?

Antwort

$(\mathbb{Z} \setminus \{0\}, \cdot)$ ist keine Gruppe, weil nur 1 und -1 multiplikative Inverse besitzen.

Restklassenringe

Für eine beliebige natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ ist $(\mathbb{Z}_n, +_n, \cdot_n)$ ein kommutativer, endlicher Ring und wird Restklassenring $\mathbb{Z}$ modulo n genannt. Zusätzlich gilt:

$$(\mathbb{Z}_n, +_n, \cdot_n) \text{ ist ein Körper} \iff n \text{ ist prim} .$$

Infos

- Da $(\mathbb{Z}_n^*, \cdot_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ eine kommutative Gruppe ist und $\mathbb{Z}_n^* = \mathbb{Z}_n \setminus \{0\}$ gilt, falls n prim ist, ist $(\mathbb{Z}_n \setminus \{0\}, \cdot_n)$ für alle Primzahlen n eine kommutative Gruppe.
- Auch hier ist es üblich, dass man nur $\mathbb{Z}_n$ statt $(\mathbb{Z}_n, +_n, \cdot_n)$ schreibt.

Beispiele

- $(\mathbb{Z}_1, +_1, \cdot_1)$ ist ein kommutativer, endlicher Ring, aber kein Körper, da $\mathbb{Z}_1 \setminus \{0\} = \emptyset$ gilt und jeder Körper mindestens ein Element braucht.

$+_1$	0
0	0

$\cdot_1$	0
0	0

- $(\mathbb{Z}_2, +_2, \cdot_2)$ ist ein endlicher Körper.

$+_2$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\cdot_2$	0	1
0	0	0
1	0	1

- $(\mathbb{Z}_3, +_3, \cdot_3)$ ist ein endlicher Körper.

$+_3$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

$\cdot_3$	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	1

- $(\mathbb{Z}_4, +_4, \cdot_4)$ ist ein kommutativer, endlicher Ring, aber kein Körper.

$+_4$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

$\cdot_4$	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	0	2
3	0	3	2	1

- $(\mathbb{Z}_5, +_5, \cdot_5)$ ist ein endlicher Körper.

$+_5$	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

$\cdot_5$	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	1	3
3	0	3	1	4	2
4	0	4	3	2	1

- $(\mathbb{Z}_6, +_6, \cdot_6)$ ist ein kommutativer, endlicher Ring, aber kein Körper.

$+_6$	0	1	2	3	4	5
0	0	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5	0
2	2	3	4	5	0	1
3	3	4	5	0	1	2
4	4	5	0	1	2	3
5	5	0	1	2	3	4

$\cdot_6$	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5
2	0	2	4	0	2	4
3	0	3	0	3	0	3
4	0	4	2	0	4	2
5	0	5	4	3	2	1

Gegeben seien folgende endlichen Ringe:

1. $(\mathbb{Z}_7, +_7, \cdot_7)$,
2. $(\mathbb{Z}_9, +_9, \cdot_9)$,
3. $(\mathbb{Z}_{11}, +_{11}, \cdot_{11})$,
4. $(\mathbb{Z}_{13}, +_{13}, \cdot_{13})$,
5. $(\mathbb{Z}_{15}, +_{15}, \cdot_{15})$,
6. $(\mathbb{Z}_{17}, +_{17}, \cdot_{17})$,
7. $(\mathbb{Z}_{19}, +_{19}, \cdot_{19})$,
8. $(\mathbb{Z}_{21}, +_{21}, \cdot_{21})$,
9. $(\mathbb{Z}_{23}, +_{23}, \cdot_{23})$,
10. $(\mathbb{Z}_{1624}, +_{1624}, \cdot_{1624})$.

Welche davon sind auch Körper?

Erinnerung:

$$n \text{ prim} \iff (\mathbb{Z}_n, +_n, \cdot_n) \text{ Körper} .$$

1. Körper.
2. Kein Körper.
3. Körper.
4. Körper.
5. Kein Körper.
6. Körper.
7. Körper.
8. Kein Körper.
9. Körper.
10. Kein Körper.

Nullteiler

Sei $(R, \oplus, \odot)$ ein Ring. Ein Element $x \in R$ mit $x \neq 0$ heißt Nullteiler, falls ein $y \in R$ mit $y \neq 0$ existiert mit:

$$x \odot y = 0$$

Infos

- y ist dann auch ein Nullteiler.
- Falls R keine Nullteiler besitzt, nennt man R nullteilerfrei.

Beispiele

- $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$, $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$, $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ und $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ sind nullteilerfrei.
- $(\mathbb{Z}_3, +_3, \cdot_3)$ ist nullteilerfrei.
- $(\mathbb{Z}_4, +_4, \cdot_4)$ besitzt den Nullteiler 2:

$$2 \cdot_2 2 = 0.$$

- Der Körper $(\mathbb{Z}_5, +_5, \cdot_5)$ ist nullteilerfrei.
- Der Ring $(\mathbb{Z}_6, +_6, \cdot_6)$ besitzt die Nullteiler 2, 3 und 4:

$$2 \cdot_6 3 = 0 \qquad 3 \cdot_6 2 = 0 \qquad 3 \cdot_6 4 = 0 \qquad 4 \cdot_6 3 = 0$$

Quizfrage

Ist jeder kommutative, nullteilerfreie Ring ein Körper?

Antwort

Nö! $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ ist ein kommutativer, nullteilerfreie Ring, aber kein Körper.

Ringe vs. Körper

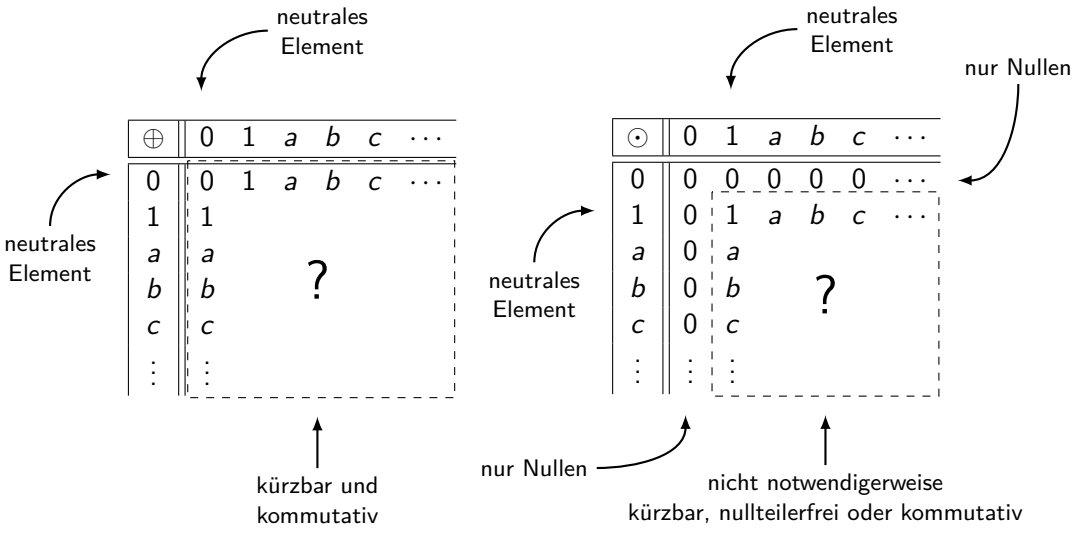
Für jeden Ring (also auch für jeden Körper) $(R, \oplus, \odot)$ gilt:

$$\forall a \in R : a \odot 0 = 0 = 0 \odot a$$

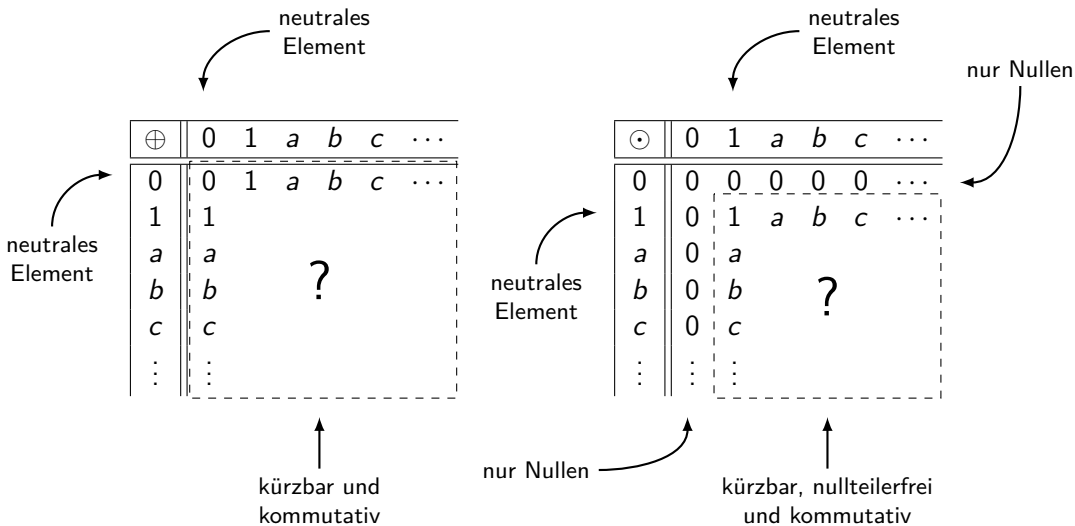
Die wesentlichen Unterschiede zwischen Ringen und Körpern sind:

1. Alle Elemente eines Körpers (außer die 0) haben Inverse bzgl. $\odot$, die eines Ringes nur manchmal.
2. $\odot$ ist bei Körpern immer kommutativ, bei Ringen nur manchmal.
3. Körper sind immer nullteilerfrei, Ringe nur manchmal.

Verknüpfungstafeln von Ringen



Verknüpfungstafeln von Körpern



Infos

- Bei Algebren mit einem Operator kann man die Assoziativität leider nicht an der Verknüpfungstafel ablesen.
- Bei Algebren mit zwei Operatoren kann man die Distributivitäten leider nicht an den Verknüpfungstafeln ablesen.

D.h. entweder man weiß, dass der Operator (bzw. die Operatoren) assoziativ (bzw. distributiv) sind (z.B. $+$ und $\cdot$ oder $+_n$ und $\cdot_n$) oder man muss es extra beweisen :-(

Monoide vs. Gruppen vs. Ringe vs. Körper

Was kann man in jeder der Strukturen machen?

1. Monoide: addieren
2. Gruppen: addieren und subtrahieren
3. Ringe: addieren, subtrahieren und multiplizieren
4. Körper: addieren, subtrahieren, multiplizieren und dividieren

Deswegen sind Körper so schön zum Rechnen! :-)

Infos

- „subtrahieren “ heißt nichts anderes als „addieren mit dem additiven Inversen“.
- „dividieren“ heißt nichts anderes als „multiplizieren mit dem multiplikativen Inversen“.

Primitive Elemente

Sei $(K, \oplus, \odot)$ ein Körper. Ein Element $a \in K$ heißt primitiv, falls es ein Erzeuger der multiplikativen Gruppe $(K \setminus \{0\}, \odot)$ ist.

Erinnerung

Für jede endliche Gruppe $(G, \circ)$ und jedes $x \in G$ gilt:

$$x \text{ ist Erzeuger von } G \iff \operatorname{ord}(x) = |G| \ .$$

Beispiele

- 2 ist primitiv in $(\mathbb{Z}_3, +_3, \cdot_3)$, da $\operatorname{ord}_{\cdot_3}(2) = 2$.
- 2 und 3 sind primitiv in $(\mathbb{Z}_5, +_5, \cdot_5)$, da $\operatorname{ord}_{\cdot_5}(2) = 4$ und $\operatorname{ord}_{\cdot_5}(3) = 4$.
- 3 und 5 sind primitiv in $(\mathbb{Z}_7, +_7, \cdot_7)$, da $\operatorname{ord}_{\cdot_7}(3) = 6$ und $\operatorname{ord}_{\cdot_7}(5) = 6$.

Isomorphie

Seien $(A, \oplus, \odot)$ und $(B, \boxplus, \boxdot)$ zwei Algebren mit jeweils zwei Operatoren. A und B sind isomorph zueinander, falls folgendes gilt:

- Es gibt eine Funktion $h : A \to B$ mit:

$$\forall x, y \in A : h(x \oplus y) = h(x) \boxplus h(y),$$
$$\forall x, y \in A : h(x \odot y) = h(x) \boxdot h(y),$$

- h ist bijektiv.

Info

Die Isomorphie von Algebren mit zwei Operatoren funktioniert analog zu der von Algebren mit nur einem Operator (s. Folie 1118).

Beispiel

Seien $(A, \oplus, \odot)$ und $(B, \boxplus, \boxdot)$ zwei Algebren mit $A = \{0, 1, 2, 3\}$, $B = \{\clubsuit, \spadesuit, \heartsuit, \diamondsuit\}$ und folgenden Verknüpfungstafeln:

A :

$\oplus$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

$\odot$	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	0	2
3	0	3	2	1

B :

$\boxplus$	$\clubsuit$	$\spadesuit$	$\heartsuit$	$\diamondsuit$
$\clubsuit$	$\clubsuit$	$\spadesuit$	$\heartsuit$	$\diamondsuit$
$\spadesuit$	$\spadesuit$	$\heartsuit$	$\diamondsuit$	$\clubsuit$
$\heartsuit$	$\heartsuit$	$\diamondsuit$	$\clubsuit$	$\spadesuit$
$\diamondsuit$	$\diamondsuit$	$\clubsuit$	$\spadesuit$	$\heartsuit$

$\boxdot$	$\clubsuit$	$\spadesuit$	$\heartsuit$	$\diamondsuit$
$\clubsuit$	$\clubsuit$	$\clubsuit$	$\clubsuit$	$\clubsuit$
$\spadesuit$	$\clubsuit$	$\spadesuit$	$\heartsuit$	$\diamondsuit$
$\heartsuit$	$\clubsuit$	$\heartsuit$	$\clubsuit$	$\heartsuit$
$\diamondsuit$	$\clubsuit$	$\diamondsuit$	$\heartsuit$	$\spadesuit$

Ein Isomorphismus $h : A \to B$ ist:

$$h(0) = \clubsuit \qquad h(1) = \spadesuit \qquad h(2) = \heartsuit \qquad h(3) = \diamondsuit$$

Themenübersicht

Polynome

Sei $(R, \oplus, \odot)$ ein beliebiger kommutativer Ring (endlich oder unendlich).

- Ein Polynom p über R in der Unbekannten x ist ein Ausdruck der Gestalt

$$p = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,$$

  wobei $a_0, \ldots, a_n \in R$ gilt.
- $\deg(p) = n$ ist der Grad und $a_1, \ldots, a_n$ sind die Koeffizienten von p. Für alle $i > n$ definieren wir $a_i := 0$.
- $R[x]$ ist die Menge aller Polynome mit Koeffizienten aus R.
- Jedes Polynom p induziert eine Funktion $f_p : R \to R$ mit

$$f_p(x) = (a_n \odot x^n) \oplus (a_{n-1} \odot x^{n-1}) \oplus \ldots \oplus (a_1 \odot x) \oplus a_0$$

  für alle $x \in R$.
- Ein Element $x_0 \in R$ mit $f_p(x_0) = 0$ heißt Nullstelle von p.

Infos

- Für ein Polynom p kann man auch $p(x)$ schreiben und für die Unkenannte x auch X.
- In einem Polynom werden Teilasudrücke der Form $1x^i$ durch x^i ersetzt und Teilausdrücke der Form $0x^i$ werden weggelassen.
- Das Polynom $p = 0$ hat per Definition den Grad $\deg(p) = -\infty$.
- $R[x]$ wird „R *adjungiert* x“ gelesen.
- Polynome aus $R[x]$ kann man sich als Wörter über dem Alphabet $\Sigma = R \cup \{+, x, ^2, ^3, ^4, \ldots\}$ vorstellen. Zwei Polynome sind also gleich, wenn sie identisch aussehen.
- Ein Polynom induziert zwar eine Funktion, ist aber selber keine. Insbesondere können zwei verschiedene Polynome dieselbe Funktion induzieren!
- Weil Jeder Körper ein Ring ist, können die Koeffizienten des Polynoms auch aus einem Körper stammen.
- Polynome könnten auch als Tupel $(a_0, a_1, \ldots, a_d)$ bzw. Folgen $(a_0, a_1, \ldots)$ definiert werden, aber das würde das Rechnen mit ihnen viel weniger intuitiv machen.

Beispiel

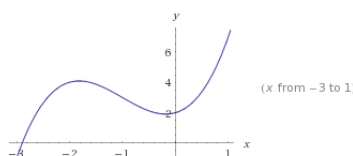
Sei $p \in \mathbb{R}[x]$ ein Polynom über dem Körper $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ mit

$$p = x^3 + 3x^2 + x + 2.$$

Für ein beliebiges $x \in \mathbb{R}$ gilt dann:

$$f_p(x) = x^3 + 3 \cdot x^2 + x + 2.$$

Weil f_p in diesem Fall eine Funktion $f_p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist, kann sie als Kurve in einem Koordinatensystem dargestellt werden:



Noch ein Beispiel

Sei $p \in \mathbb{R}[x]$ ein Polynom über dem endlichen Ring $(\mathbb{Z}_6, +_6, \cdot_6)$ mit

$$p = x^3 + 3x^2 + x + 2.$$

Für ein beliebiges $x \in \mathbb{Z}_6$ gilt dann:

$$f_p(x) = x^3 +_6 3 \cdot_6 x^2 +_6 x +_6 2$$

Daraus folgt:

x	0	1	2	3	4	5
$f_p(x)$	2	1	0	5	5	3

Diesmal ist f_p keine Funktion $f_p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. D.h. sie kann nicht als Kurve in einem Koordinatensystem dargestellt werden!

Quizfrage

Welche Nullstellen besitzen folgende Polynome aus $\mathbb{Z}_2[x]$?

0	1	x	$x+1$
x^2	x^2+1	x^2+x	x^2+x+1
x^3	x^3+1	x^3+x	x^3+x+1
x^3+x^2	x^3+x^2+1	x^3+x^2+x	x^3+x^2+x+1
x^4	x^4+1	x^4+x	x^4+x+1
x^4+x^2	x^4+x^2+1	x^4+x^2+x	x^4+x^2+x+1
x^4+x^3	x^4+x^3+1	x^4+x^3+x	x^4+x^3+x+1
$x^4+x^3+x^2$	$x^4+x^3+x^2+1$	$x^4+x^3+x^2+x$	$x^4+x^3+x^2+x+1$
x^5	x^5+1	x^5+x	x^5+x+1
x^5+x^2	x^5+x^2+1	x^5+x^2+x	x^5+x^2+x+1
x^5+x^3	x^5+x^3+1	x^5+x^3+x	x^5+x^3+x+1
$x^5+x^3+x^2$	$x^5+x^3+x^2+1$	$x^5+x^3+x^2+x$	$x^5+x^3+x^2+x+1$
x^5+x^4	x^5+x^4+1	x^5+x^4+x	x^5+x^4+x+1
$x^5+x^4+x^2$	$x^5+x^4+x^2+1$	$x^5+x^4+x^2+x$	$x^5+x^4+x^2+x+1$
$x^5+x^4+x^3$	$x^5+x^4+x^3+1$	$x^5+x^4+x^3+x$	$x^5+x^4+x^3+x+1$
$x^5+x^4+x^3+x^2$	$x^5+x^4+x^3+x^2+1$	$x^5+x^4+x^3+x^2+x$	$x^5+x^4+x^3+x^2+x+1$

Antwort

Für die Nullstellen (NS) kommen nur Elemente aus $\mathbb{Z}_2$ infrage und es wird in $\mathbb{Z}_2$ gerechnet.

0 (NS: 0, 1)	1 (NS: $-$)	x (NS: 0)	$x+1$ (NS: 1)
x^2 (NS: 0)	x^2+1 (NS: 1)	x^2+x (NS: 0)	x^2+x+1 (NS: $-$)
x^3 (NS: 0)	x^3+1 (NS: 1)	x^3+x (NS: 0, 1)	x^3+x+1 (NS: $-$)
x^3+x^2 (NS: 0, 1)	x^3+x^2+1 (NS: $-$)	x^3+x^2+x (NS: 0)	x^3+x^2+x+1 (NS: 1)
x^4 (NS: 0)	x^4+1 (NS: 1)	x^4+x (NS: 0, 1)	x^4+x+1 (NS: $-$)
x^4+x^2 (NS: 0, 1)	x^4+x^2+1 (NS: $-$)	x^4+x^2+x (NS: 0)	x^4+x^2+x+1 (NS: 1)
x^4+x^3 (NS: 0, 1)	x^4+x^3+1 (NS: $-$)	x^4+x^3+x (NS: 0)	x^4+x^3+x+1 (NS: 1)
$x^4+x^3+x^2$ (NS: 0)	$x^4+x^3+x^2+1$ (NS: 1)	$x^4+x^3+x^2+x$ (NS: 0, 1)	$x^4+x^3+x^2+x+1$ (NS: $-$)
x^5 (NS: 0)	x^5+1 (NS: 1)	x^5+x (NS: 0, 1)	x^5+x+1 (NS: $-$)
x^5+x^2 (NS: 0, 1)	x^5+x^2+1 (NS: $-$)	x^5+x^2+x (NS: 0)	x^5+x^2+x+1 (NS: 1)
x^5+x^3 (NS: 0, 1)	x^5+x^3+1 (NS: $-$)	x^5+x^3+x (NS: 0)	x^5+x^3+x+1 (NS: 1)
$x^5+x^3+x^2$ (NS: 0)	$x^5+x^3+x^2+1$ (NS: 1)	$x^5+x^3+x^2+x$ (NS: 0, 1)	$x^5+x^3+x^2+x+1$ (NS: $-$)
x^5+x^4 (NS: 0, 1)	x^5+x^4+1 (NS: $-$)	x^5+x^4+x (NS: 0)	x^5+x^4+x+1 (NS: 1)
$x^5+x^4+x^2$ (NS: 0)	$x^5+x^4+x^2+1$ (NS: 1)	$x^5+x^4+x^2+x$ (NS: 0, 1)	$x^5+x^4+x^2+x+1$ (NS: $-$)
$x^5+x^4+x^3$ (NS: 0)	$x^5+x^4+x^3+1$ (NS: 1)	$x^5+x^4+x^3+x$ (NS: 0, 1)	$x^5+x^4+x^3+x+1$ (NS: $-$)
$x^5+x^4+x^3+x^2$ (NS: 0, 1)	$x^5+x^4+x^3+x^2+1$ (NS: $-$)	$x^5+x^4+x^3+x^2+x$ (NS: 0)	$x^5+x^4+x^3+x^2+x+1$ (NS: 1)

Polynomaddition

Für zwei Polynome $a, b \in R[x]$ über einem kommutativen Ring $(R, \oplus, \odot)$ mit

$$a = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,$$
$$b = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0$$

definieren wir:

$$a + b := c_r x^r + c_{r-1} x^{r-1} + \ldots + c_1 x + c_0$$

mit $r = \max(n, m)$ und $c_i := a_i \oplus b_i$ für alle $i = 0, \ldots, r$.

Erinnerung

Wir hatten $a_i = 0$ für $i > n$ und $b_i = 0$ für $i > m$ definiert.

Beispiele

- Seien $a, b \in \mathbb{Z}[x]$ folgende Polynome über dem Ring $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$:

$$a = 2x^3 + x^2 - 3x + 3,$$
$$b = -3x^2 + 4x + 2.$$

  Dann gilt: $a + b = 2x^3 - 2x^2 + x + 5$.

- Seien $a, b \in \mathbb{Z}_4[x]$ folgende Polynome über dem Ring $(\mathbb{Z}_4, +_4, \cdot_4)$:

$$a = x^3 + x^2 + 1,$$
$$b = 3x^3 + x^2 + 3x + 2.$$

  Dann gilt: $a + b = 2x^2 + 3x + 3$.

Polynomsubtraktion

Für zwei Polynome $a, b \in R[x]$ über einem kommutativen Ring $(R, \oplus, \odot)$ mit

$$a = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,$$
$$b = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0$$

definieren wir:

$$a - b := c_r x^r + c_{r-1} x^{r-1} + \ldots + c_1 x + c_0$$

mit $r = \max(n, m)$ und $c_i := a_i \oplus (-b_i)$ für alle $i = 0, \ldots, r$.

Erinnerungen

- $-b_i$ ist das additive Inverse von b_i in $(R, \oplus, \odot)$.
- Wir hatten $a_i = 0$ für $i > n$ und $b_i = 0$ für $i > m$ definiert.

Beispiele

- Seien $a, b \in \mathbb{Z}[x]$ folgende Polynome über dem Ring $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$:

$$a = 2x^3 + x^2 - 3x + 3,$$
$$b = -3x^2 + 4x + 2.$$

  Dann gilt: $a - b = 2x^3 + 4x^2 - 7x + 1$.

- Seien $a, b \in \mathbb{Z}_4[x]$ folgende Polynome über dem Ring $(\mathbb{Z}_4, +_4, \cdot_4)$:

$$a = x^3 + x^2 + 1,$$
$$b = 3x^3 + x^2 + 3x + 2.$$

  Dann gilt: $a - b = 2x^3 + x + 3$.

Polynommultiplikation

Für zwei Polynome $a, b \in R[x]$ über einem kommutativen Ring $(R, \oplus, \odot)$ mit

$$a = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,$$
$$b = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0$$

definieren wir:

$$a \cdot b := c_r x^r + c_{r-1} x^{r-1} + \ldots + c_1 x + c_0$$

mit $r = n + m$ und $c_i = \bigoplus_{j=0}^{i} (a_j \odot b_{i-j})$ für alle $i = 0, \ldots, r$.

Info

Der Ausdruck

$$\bigoplus_{j=0}^{i} (a_j \odot b_{i-j}) = (a_0 \odot b_i) \oplus (a_1 \odot b_{i-1}) \oplus (a_2 \odot b_{i-2}) \oplus \ldots \oplus (a_i \odot b_0)$$

entsteht durch das Ausmultiplizieren, Sortieren und Zusammenfassen der Koeffizienten.

Beispiele

- Seien $a, b \in \mathbb{Z}[x]$ folgende Polynome über dem Ring $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$:

$$a = x^2 - 2x + 3,$$
$$b = 3x + 1.$$

  Dann gilt: $a \cdot b = 3x^3 - 5x^2 + 7x + 3$.

- Seien $a, b \in \mathbb{Z}_4[x]$ folgende Polynome über dem Ring $(\mathbb{Z}_4, +_4, \cdot_4)$:

$$a = x^2 + 3x + 2,$$
$$b = 2x + 3.$$

  Dann gilt: $a \cdot b = 2x^3 + x^2 + x + 2$.

Info

Mit Polynomen aus $\mathbb{Z}_n[x]$ rechnet man einfach wie mit Polynomen aus $\mathbb{Z}[x]$, mit dem Unterschied, dass am Schluss alle Koeffizienten modulo n genommen werden. Kein Koeffizient darf negativ oder größer oder gleich n sein!

Polynomdivision

Für gegebene Polynome $a, b \in K[x]$ über einem Körper $(K, \oplus, \odot)$ liefert die Polynomdivision von a durch b eindeutige Polynome r und s, so dass gilt:

$$a = b \cdot s + r \quad \text{und} \quad 0 \leq \deg(r) < \deg(b)$$

Analog zur ganzzahligen Division in $\mathbb{Z}$ definieren wir

$$s := a \div b \quad \text{und} \quad r := a \bmod b$$

Auf diese Weise können wir den Euklidischen Algorithmus und seine Erweiterung auch auf Polynome anwenden!

Beispiel

Seien $a, b \in \mathbb{Q}[x]$ mit $a = 3x^4 - 7x^3 - 6x^2 + 8x - 1$ und $b = x^2 - 3x + 1$:

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
(3x^4 & -7x^3 & -6x^2 & +8x & -1) & : \; (x^2 - 3x + 1) \; = \; 3x^2 + 2x - 3 \\
\cline{1-3}
-(3x^4 & -9x^3 & +3x^2) & & & \\
\cline{2-4}
 & 2x^3 & -9x^2 & +8x & & \\
 & -(2x^3 & -6x^2 & +2x) & & \\
\cline{3-5}
 & & -3x^2 & +6x & -1 & \\
 & & -(-3x^2 & +9x & -3) & \\
\cline{4-5}
 & & & -3x & +2 &
\end{array}
$$

Es gilt dann $a = b \cdot s + r$ mit:

$$s = 3x^2 + 2x - 3 \quad \text{und} \quad r = -3x + 2.$$

Quizfragen

Seien $p, q \in \mathbb{Q}[x]$ zwei Polynome mit $p = x^4 - 7x^2 + 6x$ und $q = x^3 - 8x + 3$.

1. Was ist $\mathrm{ggT}(p, q)$?
2. Für welche Polynome $a, b \in \mathbb{Q}[x]$ gilt die Gleichung $a \cdot q + b \cdot p = \mathrm{ggT}(p, q)$?

Hinweis: Führe den erweiterten Euklidischen Algorithmus mithilfe der Polynomdivision mit p und q durch.

Antworten

Die Tabelle des erweiterten Euklidischen Algorithmus sieht wie folgt aus:

r_i	s_i	t_i
$x^4 - 7x^2 + 6x$	$-$	$x^2 - 3x + 1$
$x^3 - 8x + 3$	x	$-x + 3$
$x^2 + 3x$	$x - 3$	1
$x + 3$	x	0
0	$-$	$-$

Daraus folgt:

1. $\mathrm{ggT}(p, q) = x + 3$.
2. $a = x^2 - 3x + 1$, $b = -x + 3$.

Polynomdivision über $\mathbb{Z}_n$

Sei n eine Primzahl, d.h. $\mathbb{Z}_n$ ein Körper. Eine Polynomdivision mit Polynomen über $\mathbb{Z}_n$ (d.h. mit Koeffizienten aus $\mathbb{Z}_n$) funktioniert analog zu einer Polynomdivision über $\mathbb{Q}$ oder $\mathbb{R}$ mit zwei wesentlichen Unterschieden:

- statt Zahlen zu dividieren, multipliziert man mit Inversen
- nach jeder Multiplikation und Subtraktion nimmt man das Ergebnis, falls es nicht in $\mathbb{Z}_n$ ist, modulo p

Beispiel

Seien $a, b \in \mathbb{Z}_5[x]$ mit $a = 3x^4 + x^3 + 3x^2 + 4x + 1$ und $b = 2x^2 + x + 4$.

$$
\begin{array}{rrrrl}
(3x^4 & +x^3 & +3x^2 & +4x & +1) \;:\; (2x^2 + x + 4) \;=\; 4x^2 + x + 3 \\
-(3x^4 & +4x^3 & +x^2) & & \\
\hline
 & 2x^3 & +2x^2 & +4x & \\
 & -(2x^3 & +x^2 & +4x) & \\
\hline
 & & x^2 & & +1 \\
 & & -(x^2 & +3x & +2) \\
\hline
 & & & 2x & +4
\end{array}
$$

In $\mathbb{Z}_5$ gilt $2^{-1} = 3$, da $2 \cdot_5 3 = 6 \bmod 5 = 1$. Anstatt also jedesmal durch $2x^2$ zu dividieren multipliziert man (modulo 5) mit $(2x^2)^{-1} = 3x^{-2}$, d.h.:

$$3x^4 \cdot 3x^{-2} = (3 \cdot_5 3)x^2 = 4x^2, \quad 2x^3 \cdot 3x^{-2} = (2 \cdot_5 3)x = x, \quad x^2 \cdot 3x^{-2} = 1 \cdot_5 3 = 3.$$

Quizfragen

Sei n eine Primzahl und $a, b \in \mathbb{Z}_n[x]$ zwei Polynome über $\mathbb{Z}_n$. Welche Polynome $r, s \in \mathbb{Z}_p[x]$ mit $0 \leq \deg(r) < \deg(b)$ erfüllen für folgende a, b und n die Gleichung $a = b \cdot s + r$?

1. $a = x^3 + 1$, $b = x^2 + x$, $n = 2$,
2. $a = x^3 + x^2 + 1$, $b = x^2 + x + 1$, $n = 2$,
3. $a = x^3 + x^2 + x$, $b = x^2 + 1$, $n = 2$,
4. $a = x^3 + x^2 + 2$, $b = 2x^2 + 1$, $n = 3$,
5. $a = x^3 + x + 2$, $b = x^2 + 2x + 2$, $n = 3$,
6. $a = 2x^3 + 3x + 1$, $b = 3x^2 + x + 2$, $n = 5$,
7. $a = x^3 + 2x^2 + 4$, $b = 4x^2 + 3x + 1$, $n = 5$,
8. $a = 3x^3 + 4x + 5$, $b = 4x^2 + 5x$, $n = 7$.

Hinweis: Benutze Polynomdivision!

Antworten

1.

$$\begin{array}{rrrrrcrcl} & (x^3 & & & +1) & : & (x^2 & +x) & = & x & +1 \\ - & (x^3 & +x^2) & & & & & & & & \\ & & x^2 & & +1 & & & & & & \\ & - & (x^2 & +x) & & & & & & & \\ & & & & x & +1 & & & & & \end{array}$$

Daraus folgt: $r = x + 1$ und $s = x + 1$.

2.

$$\begin{array}{rrrrrcrcl} & (x^3 & +x^2 & & +1) & : & (x^2 & +x & +1) & = & x \\ - & (x^3 & +x^2 & +x) & & & & & & & \\ & & & x & +1 & & & & & & \end{array}$$

Daraus folgt: $r = x + 1$ und $s = x$.

3.

$$\begin{array}{rrrrrcrcl} & (x^3 & +x^2 & +x &) & : & (x^2 & +1) & = & x & +1 \\ - & (x^3 & & +x) & & & & & & & \\ & & x^2 & & & & & & & & \\ & - & (x^2 & & +1) & & & & & & \\ & & & & 1 & & & & & & \end{array}$$

Daraus folgt: $r = 1$ und $s = x + 1$.

4.

$$\begin{array}{rrrrrcrcl} & (x^3 & +x^2 & & +2) & : & (2x^2 & +1) & = & 2x & +2 \\ - & (x^3 & & +2x) & & & & & & & \\ & & x^2 & +x & +2 & & & & & & \\ & - & (x^2 & & +2) & & & & & & \\ & & & x & & & & & & & \end{array}$$

Daraus folgt: $r = x$ und $s = 2x + 2$.

5.

$$\begin{array}{rrrrcrrcrr} & (x^3 & & +x & +2) & : & (x^2 & +2x & +2) & = & x & +1 \\ - & (x^3 & +2x^2 & +2x) & & & & & & & & \\ & & x^2 & 2x & +2 & & & & & & & \\ & - & (x^2 & +2x & +2) & & & & & & & \\ & & & & 0 & & & & & & & \end{array}$$

Daraus folgt: $r = 0$ und $s = x + 1$.

6.

$$\begin{array}{rrrrcrrcrr} & (2x^3 & & +3x & +1) & : & (3x^2 & +x & +2) & = & 4x & +2 \\ - & (2x^3 & +4x^2 & +3x) & & & & & & & & \\ & & x^2 & & +1 & & & & & & & \\ & - & (x^2 & +2x & +4) & & & & & & & \\ & & & 3x & +2 & & & & & & & \end{array}$$

Daraus folgt: $r = 3x + 2$ und $s = 4x + 2$.

7.

$$\begin{array}{rrrrcrrcl} & (x^3 & +2x^2 & +4) & : & (4x^2 & +3x \quad +1) & = & 4x \\ - & (x^3 & +2x^2 & +4x) & & & & & \\ & & & x \quad +4 & & & & & \end{array}$$

Daraus folgt: $r = x + 4$ und $s = 4x$.

8.

$$\begin{array}{rrrrcrrcl} & (3x^3 & & +4x \quad +5) & : & (4x^2 & +5x) & = & 6x \quad +3 \\ - & (3x^3 & +2x^2) & & & & & & \\ & & (5x^2 & +4x \quad +5) & & & & & \\ & - & (5x^2 & +x) & & & & & \\ & & & 3x \quad +5 & & & & & \end{array}$$

Daraus folgt: $r = 3x + 5$ und $s = 6x + 3$.

Polynomringe

Für jeden kommutativen Ring R bildet $R[x]$ mit der Polynomaddition und -multiplikation aus den Folien 1180 und 1184 wieder einen kommutativen Ring. Polynome können aber auch benutzt werden, um das Konzept von Restklassenringen zu verallgemeinern.

Sei K ein Körper und $p \in K[x]$ ein Polynom mit Grad $\deg(p) = n$. Dann bildet die Menge

$$K[x]_p = \{q \in K[x] \mid \deg(q) < \deg(p)\}$$

aller Polynome aus $K[x]$ mit kleinerem Grad als p zusammen mit den Operationen

$$a +_p b := (a + b) \bmod p \quad \text{und} \quad a \cdot_p b := (a \cdot b) \bmod p.$$

einen kommutativen Ring. Dieser wird Restklassenring $K[x]$ modulo p genannt.

Info

Für jeden endlichen Körper gilt: $|K[x]_p| = |K|^{\deg(p)}$, z.B.: $|\mathbb{Z}_3[x]_{x^4+1}| = 3^4 = 81$

Beispiel

Sei $p \in \mathbb{Z}_2[x]$ mit $p = x^2 + 1$. Dann bildet $\mathbb{Z}_2[x]_p = \{0, 1, x, x+1\}$ mit $+_p$ und $\cdot_p$ einen kommutativen Ring mit folgenden Verknüpfungstafeln:

$+_p$	0	1	x	$x+1$
0	0	1	x	$x+1$
1	1	0	$x+1$	x
x	x	$x+1$	0	1
$x+1$	$x+1$	x	1	0

$\cdot_p$	0	1	x	$x+1$
0	0	0	0	0
1	0	1	x	$x+1$
x	0	x	1	$x+1$
$x+1$	0	$x+1$	$x+1$	0

Es gilt z.B.:

- $(x+1) +_p x = ((x+1) + x) \bmod p = 1$
- $(x+1) \cdot_p x = ((x+1) \cdot x) \bmod p = (x^2 + x) \bmod p = x + 1$

Infos

Man benutzt bei Restklassenringen oft verschiedene Schreibweisen:

- Bei Restklassenringen $\mathbb{Z}$ modulo n schreibt man oft $(\mathbb{Z}/(n), +, \cdot)$ bzw. $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \cdot)$ statt $(\mathbb{Z}_n, +_n, \cdot_n)$, weil die zwei Ringe zueinander isomorph sind.
- Bei Restklassenringen $K[x]$ modulo p schreibt man analog auch $(K/(q), +, \cdot)$ oder auch $(K[x]_{\deg(p)}, +_p, \cdot_p)$ statt $(K[x]_p, +_p, \cdot_p)$.

Erinnerung: Isomorphie heißt nicht Gleichheit! Dass zwei Algebren isomorph sind heißt nur, dass sie dieselbe Struktur besitzen. In DS machen wir aber ein Auge zu und dürfen sorglos das eine durch das andere ersetzen ;-)

Quizfragen

Welche Elemente sind in folgenden Mengen enthalten?

1. $\mathbb{Z}_2[x]_{x^2+1}$,
2. $\mathbb{Z}_5[x]_{x+4}$,
3. $\mathbb{Z}_2[x]_{x^3+x}$,
4. $\mathbb{Z}_3[x]_{x^2+2}$,
5. $\mathbb{Z}_2[x]_{x^4+x+1}$.

Hinweis: $|\mathbb{Z}_n[x]_p| = |\mathbb{Z}_n|^{\deg(p)} = n^{\deg(p)}$.

Antworten

1. $\mathbb{Z}_2[x]_{x^2+1} = \{0, 1, x, x+1\}$.
2. $\mathbb{Z}_5[x]_{x+4} = \{0, 1, 2, 3, 4\}$.
3. $\mathbb{Z}_2[x]_{x^3+x} = \{0, 1, x, x+1, x^2, x^2+1, x^2+x, x^2+x+1\}$.
4. $\mathbb{Z}_3[x]_{x^2+2} = \{0, 1, 2, x, x+1, x+2, 2x, 2x+1, 2x+2\}$.
5. $\mathbb{Z}_2[x]_{x^4+x+1} = \{0, 1, x, x+1, x^2, x^2+1, x^2+x, x^2+x+1, x^3, x^3+1, x^3+x, x^3+x+1, x^3+x^2, x^3+x^2+1, x^3+x^2+x, x^3+x^2+x+1\}$.

Quizfragen

Sei $p = x^2 + 1$ ein Polynom über $\mathbb{Z}_2$ und $R = (\mathbb{Z}_2[x]_p, +_p, \cdot_p)$ ein Restklassenring modulo p.

1. Wie sieht der folgende Ausschnitt der multiplikativen Verknüpfungstafel von R aus?

$\cdot_p$	0	1	x	$x+1$
$x+1$				

2. Woran erkennt man, dass R kein Körper ist?

Antworten

1. Es gilt:

$\cdot_p$	0	1	x	$x+1$
$x+1$	0	$x+1$	$x+1$	0

2. R ist nicht nullteilerfrei, da $(x+1) \cdot_p (x+1) = 0$. Außerdem gilt die Kürzungsregel nicht, da $(x+1) \cdot_p 1 = (x+1) \cdot_p x$.

Quizfragen

Sei $p = x^2 + x$ ein Polynom über $\mathbb{Z}_2$ und $R = (\mathbb{Z}_2[x]_p, +_p, \cdot_p)$ ein Restklassenring.

1. Wie sieht der folgende Ausschnitt der multiplikativen Verknüpfungstafel von R aus?

$\cdot_p$	0	1	x	$x+1$
$x+1$				

2. Woran erkennt man, dass R kein Körper ist?

Antworten

1. Es gilt:

$\cdot_p$	0	1	x	$x+1$
$x+1$	0	$x+1$	0	$x+1$

2. R ist nicht nullteilerfrei, da $(x+1) \cdot_p x = 0$. Außerdem gilt die Kürzungsregel nicht, da $(x+1) \cdot_p 1 = (x+1) \cdot_p (x+1)$.

Quizfragen

Sei $p = 2x^2 + x$ ein Polynom über $\mathbb{Z}_3$ und $R = (\mathbb{Z}_3[x]_p, +_p, \cdot_p)$ ein Restklassenring.

1. Wie sieht der folgende Ausschnitt der multiplikativen Verknüpfungstafel von R aus?

$\cdot_p$	0	1	x	$x+1$
x				

2. Wie sieht der folgende Ausschnitt der multiplikativen Verknüpfungstafel von R aus?

$\cdot_p$	$x+1$	$x+2$
$2x$		
$2x+1$		

3. Woran erkennt man, dass R kein Körper ist?

Antworten

1. Es gilt:

$\cdot_p$	0	1	x	$x+1$
x	0	x	x	$2x$

2. Es gilt:

$\cdot_p$	$x+1$	$x+2$
$2x$	x	0
$2x+1$	$2x+1$	$x+2$

3. R ist nicht nullteilerfrei, da $2x \cdot_p (x+2) = 0$. Außerdem gilt die Kürzungsregel nicht, da $x \cdot_p 1 = x \cdot_p x$.

Faktorisierung von Polynomen

Sei K ein Körper. Das Ziel der Faktorisierung von Polynomen ist es zu einem gegebenen Polynom $p \in K[x]$ Polynome $p_1, \ldots, p_n \in K[x]$ zu finden, so dass $p = p_1 \cdot \ldots \cdot p_n$ gilt. Es gilt außerdem:

$$x_0 \text{ ist Nullstelle von } p \iff (x - x_0) \text{ ist ein Faktor von } p \ .$$

D.h., dass Polynome p_i mit $\deg(p_i) = 1$ sehr leicht abgespalten werden können, indem man eine Nullstelle x_0 von p durch „scharfes Hinschauen“ errät (d.h. durch Ausprobieren) und dann p durch $(x - x_0)$ teilt.

Infos

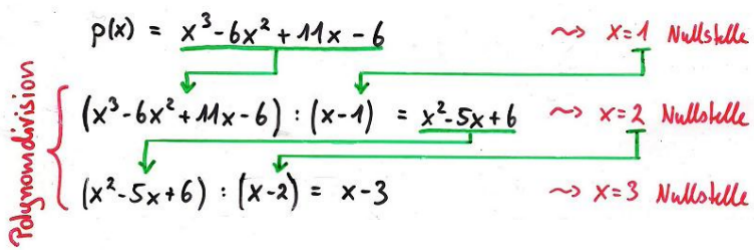
- Analog zur Primfaktorzerlegung ganzer Zahlen, ist die Faktorisierung von Polynomen über einem Körper eindeutig.
- Weil K ein Körper ist, ist es nullteilerfrei und es gilt für alle $p_1, \ldots, p_n \in K[x]$:

$$\deg(p_1 \cdot \ldots \cdot p_n) = \deg(p_1) + \ldots + \deg(p_n).$$

Beispiele

- In $\mathbb{R}[x]$ gilt:

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x-1)(x-2)(x-3).$$



- In $\mathbb{Z}_2[x]$ gilt:
$$x^4 + x^2 = x^2(x+1)^2.$$
- In $\mathbb{Z}_3[x]$ gilt:
$$x^4 + x^2 + 1 = (x+1)^2(x+2)^2.$$
- In $\mathbb{Z}_5[x]$ gilt:
$$x^3 + 2x^2 + 4x + 3 = (x+1)(x+2)(x+4).$$

Quizfragen

Gegeben seien folgende Polynome über verschiedene Körper:

1. $a = 2x^3 + 10x^2 + 6x - 18$ mit $a \in \mathbb{R}[x]$,
2. $b = 3x^3 + 6x^2 - 3x - 6$ mit $b \in \mathbb{R}[x]$,
3. $c = x^4 + x^2 + 1$ mit $c \in \mathbb{Z}_3[x]$,
4. $d = x^5 + x$ mit $d \in \mathbb{Z}_2[x]$,
5. $e = x^3 + 2x^2 + 4x + 3$ mit $e \in \mathbb{Z}_5[x]$.

Wie sieht die eindeutige Faktorisierung von a, b, c, d und e aus?

Antworten

1. $a = 2(x-1)(x+3)^2$.
2. $b = 3(x-1)(x+1)(x+2)$.
3. $c = (x+1)^2(x+2)^2$.
4. $d = x(x+1)^4$.
5. $e = (x+1)(x+2)(x+4)$.

Irreduzibilität von Polynomen

Sei K ein Körper. Ein Polynom $p \in K[x]$ heißt reduzibel wenn zwei Polynome $p_1, p_2 \in K[x]$ existieren mit $\deg(p_1), \deg(p_2) \geq 1$ und $p = p_1 \cdot p_2$. Polynome, die nicht reduzibel sind, nennt man irreduzibel.

Info

Die Irreduzibilität von Polynomen ist das Analogon zur Primheit von Zahlen.

Beispiel

Das Polynom $p = x^2 + 1$ ist irreduzibel über $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$ oder $\mathbb{Z}_3$, da keine Polynome aus $\mathbb{R}[x]$, $\mathbb{Q}[x]$ oder $\mathbb{Z}_3[x]$ existieren in denen sich p zerlegen lässt. Dagegen lässt sich p über andere Körper zerlegen, z.B.:

- Falls $p \in \mathbb{C}[x]$:

$$(x + i)(x - i) = x^2 - i^2 = x^2 - (-1) = x^2 + 1$$

- Falls $p \in \mathbb{Z}_2[x]$:

$$(x + 1)(x + 1) = x^2 + 2x + 1 = x^2 + 1$$

- Falls $p \in \mathbb{Z}_5[x]$:

$$(x + 2)(x + 3) = x^2 + 5x + 6 = x^2 + 1$$

Quizfrage

Sei K ein Körper. Wieso sind Polynome $p \in K[x]$ mit Grad 0 oder 1 immer irreduzibel?

Antwort

Aus

$$\deg(p_1 \cdot p_2) = \deg(p_1) + \deg(p_2)$$

(s. Folie 1209), können keine zwei Polynome $p_1, p_2 \in K[x]$ mit $\deg(p_1), \deg(p_2) \geq 1$ gefunden werden mit $p = p_1 \cdot p_2$.

Quizfrage

Sei K ein Körper. Wieso sind Polynome $p \in K[x]$ mit Grad 2 oder 3 genau dann irreduzibel, wenn sie keine Nullstellen besitzen?

Antwort

Aus Folie 1209 wissen wir:

$$\deg(p_1 \cdot p_2) = \deg(p_1) + \deg(p_2).$$

Außerdem gilt:

- Falls $\deg(p) = 2$, dann kann p nur in zwei Polynome $p_1, p_2 \in K[x]$ zerfallen mit $\deg(p_1), \deg(p_2) = 1$.
- Falls $\deg(p) = 3$, dann kann p nur in zwei Polynome $p_1, p_2 \in K[x]$ zerfallen mit $\deg(p_1) = 1$ und $\deg(p_2) = 2$ oder $\deg(p_1) = 2$ und $\deg(p_2) = 1$.

In beiden Fällen enthält p ein Faktor von Grad 1. Aus

$$x_0 \text{ ist Nullstele von } p \iff (x - x_0) \text{ ist ein Faktor von } p$$

folgt die Aussage.

Quizfrage

Sei K ein Körper. Wieso kann ein Polynom $p \in K[x]$ mit $\deg(p) \geq 4$ reduzibel sein, obwohl es keine Nullstellen besitzt?

Antwort

p könnte beispielsweise in nullstellenfreie Faktoren $p_1, \ldots, p_n$ mit $\deg(p_1), \ldots, \deg(p_n) \geq 2$ zerfallen. Beispielsweise gilt für $p \in \mathbb{Q}[x]$ mit $p = x^4 + 2x^2 + 1$:

$$p = (x^2 + 1) \cdot (x^2 + 1).$$

Somit ist p reduzibel, obwohl es keine Nullstellen besitzt.

Wichtige Aussagen zur Irreduzibilität von Polynomen

Für alle Polynome $p \in K[x]$ gilt:

1. Falls $\deg(p) = 0$ oder $\deg(p) = 1$, dann ist p immer irreduzibel.
2. Falls $\deg(p) = 2$ oder $\deg(p) = 3$, dann gilt:

$$p \text{ irreduzibel} \iff p \text{ besitzt keine Nullstelle} .$$

3. Falls $\deg(p) \geq 4$, dann gilt:

$$p \text{ irreduzibel} \implies p \text{ besitzt keine Nullstelle} .$$

Welche der folgenden Polynome sind irreduzibel?

1. $x^3 + x^2 + 2 \in \mathbb{Z}_3[x]$,
2. $x^3 + 2x + 2 \in \mathbb{Z}_5[x]$,
3. $x^3 + 2x + 2 \in \mathbb{Z}_3[x]$,
4. $x^3 + x + 1 \in \mathbb{Z}_2[x]$,
5. $x^3 + x^2 + x + 1 \in \mathbb{Z}_2[x]$,
6. $x^3 + 2x + 1 \in \mathbb{Z}_3[x]$,
7. $x^3 + x^2 + x \in \mathbb{Z}_5[x]$,
8. $x^2 + x + 1 \in \mathbb{Z}_2[x]$.

Antworten

Erinnerung: Ein Polynom von Grad 2 oder 3 ist genau dann irreduzibel, wenn es keine Nullstellen hat.

1. Irreduzibel (keine Nullstellen).
2. Reduzibel (Nullstellen: 1 und 3).
3. Irreduzibel (keine Nullstellen).
4. Irreduzibel (keine Nullstellen).
5. Reduzibel (Nullstelle: 1).
6. Irreduzibel (keine Nullstellen).
7. Reduzibel (Nullstelle: 0).
8. Irreduzibel (keine Nullstellen).

Quizfrage

Aus der Quizfrage auf Folie 1178 wissen wir, dass folgende Polynome $p \in \mathbb{Z}_2[x]$, die einzigen mit $2 \leq \deg(p) \leq 5$ sind, die keine Nullstellen besitzen:

Grad 2: $x^2 + x + 1$,
Grad 3: $x^3 + x + 1$, $x^3 + x^2 + 1$,
Grad 4: $x^4 + x + 1$, $x^4 + x^2 + 1$, $x^4 + x^3 + 1$,
Grad 5: $x^5 + x + 1$, $x^5 + x^2 + 1$, $x^5 + x^3 + 1$. $x^5 + x^4 + 1$

Welche davon sind irreduzibel?

Antwort

$x^2 + x + 1$, $x^3 + x + 1$ und $x^3 + x^2 + 1$ sind alle irreduzibel, weil sie Grad 2 oder 3 haben und keine Nullstellen besitzen.

Damit ein Polynom von Grad 4 reduzibel ist, obwohl es keine Nullstellen besitzt, muss es in zwei nullstellenfreie Polynome von jeweils Grad 2 zerfallen. Die einzige Kombination hierfür ist:

$$(x^2 + x + 1) \cdot (x^2 + x + 1) = x^4 + x^2 + 1.$$

D.h., dass $x^4 + x^2 + 1$ reduzibel ist und $x^4 + x + 1$ und $x^4 + x^3 + 1$ irreduzibel.

(Fortsetzung)

Damit ein Polynom von Grad 5 reduzibel ist, obwohl es keine Nullstellen besitzt, muss es in zwei nullstellenfreie Polynome mit Graden 2 und 3 zerfallen. Die einzigen Kombinationen hierfür sind:

$$(x^2 + x + 1) \cdot (x^3 + x + 1) = x^5 + x^4 + 1,$$
$$(x^2 + x + 1) \cdot (x^3 + x^2 + 1) = x^5 + x + 1.$$

D.h., dass $x^5 + x^4 + 1$ und $x^5 + x + 1$ reduzibel sind und $x^5 + x^2 + 1$ und $x^5 + x^3 + 1$ irreduzibel.

Endliche Körper

Wir wissen nun, dass $(\mathbb{Z}_n[x]_p, +_p, \cdot_p)$ für jede natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ und jedes Polynom $p \in \mathbb{Z}_n[x]$ mit Grad $\deg(p) = d$ ein kommutativer endlicher Ring mit n^d Elementen ist.

Zusätzlich gilt:

$$(\mathbb{Z}_n[x]_p, +_p, \cdot_p) \text{ ist ein Körper } \iff p \text{ ist irreduzibel und } n \text{ prim } .$$

Man nennt solche Körper Galois-Körper (engl. *Galois Field*) und bezeichnet sie mit $\mathrm{GF}(n^d)$.

Beispiel

Sei $p = x^2 + x + 1$ ein Polynom aus $\mathbb{Z}_2[x]$. Da p keine Nullstellen in $\mathbb{Z}_2$ besitzt, ist es irreduzibel. $\mathbb{Z}_2[x]_2 = \{0, 1, x, x+1\}$ bildet also mit $+_p$ und $\cdot_p$ einen Galois-Körper mit folgenden Verknüpfungstafeln:

$+_p$	0	1	x	$x+1$
0	0	1	x	$x+1$
1	1	0	$x+1$	x
x	x	$x+1$	0	1
$x+1$	$x+1$	x	1	0

$\cdot_p$	0	1	x	$x+1$
0	0	0	0	0
1	0	1	x	$x+1$
x	0	x	$x+1$	1
$x+1$	0	$x+1$	1	x

Es gilt z.B.:

- $(x+1) +_p x = ((x+1) + x) \bmod p = 1$
- $(x+1) \cdot_p x = ((x+1) \cdot x) \bmod p = (x^2 + x) \bmod p = 1$

Quizfragen

1. Ist $(\mathbb{Z}_3[x]_p, +_p, \cdot_p)$ mit $p = x^4 + x^2 + 1$ ein Körper?
2. Ist $(\mathbb{Z}_9[x]_p, +_p, \cdot_p)$ mit $p = 8x^2 + 3x + 6$ ein Körper?
3. Ist $(\mathbb{Z}_3[x]_p, +_p, \cdot_p)$ mit $p = 2x^2 + 2$ ein Körper?
4. Ist $(\mathbb{Z}_4[x]_p, +_p, \cdot_p)$ mit $p = x^2 + x + 3$ ein Körper?
5. Ist $(\mathbb{Z}_3[x]_p, +_p, \cdot_p)$ mit $p = x^3 + 2x + 1$ ein Körper?
6. Ist $(\mathbb{Z}_2[x]_p, +_p, \cdot_p)$ mit $p = x^3 + x + 1$ ein Körper?
7. Ist $(\mathbb{Z}_6[x]_p, +_p, \cdot_p)$ mit $p = x^2 + 3x + 2$ ein Körper?
8. Ist $(\mathbb{Z}_2[x]_p, +_p, \cdot_p)$ mit $p = x^3 + x^2 + x + 1$ ein Körper?

Antworten

Erinnerung: Damit $(\mathbb{Z}_n[x]_p, +_p, \cdot_p)$ ein Körper ist, müssen n prim und p irreduzibel sein.

1. Nein! p ist reduzibel, weil es die Nullstelle 2 besitzt.
2. Nein! 9 ist nicht prim.
3. Ja!
4. Nein! 4 ist nicht prim.
5. Ja!
6. Ja!
7. Nein! 6 ist nicht prim.
8. Nein! p ist reduzibel, weil es die Nullstelle 1 besitzt.

Infos

- Eine natürliche Zahl k für die natürliche Zahlen $d, n \in \mathbb{N}$ mit n prim und $k = n^d$ existieren, nennt man eine Primzahlpotenz.
- Für jede Primzahlpotenz n^d prim gibt es einen Galois-Körper $\mathrm{GF}(n^d)$ mit n^d Elementen.
- Alle endlichen Körper sind Galois-Körper und je zwei Galois-Körper mit gleich vielen Elementen sind isomorph zueinander
- Die Körper der Form $(\mathbb{Z}_n, +_n, \cdot_n)$ sind Spezialfälle der Körper $(\mathbb{Z}_n[x]_p, +_p, \cdot_p)$ für $\deg(p) = 1$.
- Falls $\deg(p) = 0$, dann gilt $\mathbb{Z}_n[x]_p = \{0\}$, da 0 das einzige Polynom mit negativem Grad ist (s. Folie 1175).
- Wäre $p = p_1 \cdot p_2$ reduzibel, dann sind alle Polynome, die p_1 oder p_2 als Faktor besitzen, Nullteiler in $(\mathbb{Z}_n[x]_p, +_p, \cdot_p)$.

Quizfragen

1. Gibt es einen Körper mit 5 Elementen?
2. Gibt es einen Körper mit 8 Elementen?
3. Gibt es einen Körper mit 9 Elementen?
4. Gibt es einen Körper mit 15 Elementen?
5. Gibt es einen Körper mit 21 Elementen?
6. Gibt es einen Körper mit 27 Elementen?
7. Gibt es einen Körper mit 32 Elementen?
8. Gibt es einen Körper mit 48 Elementen?
9. Gibt es einen Körper mit 100 Elementen?
10. Gibt es einen Körper mit 121 Elementen?
11. Gibt es einen Körper mit 124 Elementen?

Quizfragen

1. Ja! 5 ist eine Primzahl und somit eine Primzahlpotenz: $5 = 5^1$.
2. Ja! 8 ist eine Primzahlpotenz: $8 = 2^3$.
3. Ja! 9 ist eine Primzahlpotenz: $9 = 3^2$.
4. Nein! 15 ist keine Primzahlpotenz: $15 = 3 \cdot 5$.
5. Nein! 21 ist keine Primzahlpotenz: $21 = 3 \cdot 7$.
6. Ja! 27 ist eine Primzahlpotenz: $27 = 3^3$.
7. Ja! 32 ist eine Primzahlpotenz: $32 = 2^5$.
8. Nein! 48 ist keine Primzahlpotenz: $48 = 3 \cdot 2^4$.
9. Nein! 100 ist keine Primzahlpotenz: $100 = 2^2 \cdot 5^2$.
10. Ja! 121 ist eine Primzahlpotenz: $121 = 11^2$.
11. Nein! 124 ist keine Primzahlpotenz: $124 = 2^2 \cdot 31$.

Quizfragen

1. Ist GF(11) isomorph zu $(\mathbb{Z}_{11}, +_{11}, \cdot_{11})$?
2. Ist GF(27) isomorph zu $(\mathbb{Z}_{27}, +_{27}, \cdot_{27})$?
3. Ist GF(13) isomorph zu $(\mathbb{Z}_{13}, +_{13}, \cdot_{13})$?
4. Ist GF(9) isomorph zu $(\mathbb{Z}_{9}, +_{9}, \cdot_{9})$?
5. Ist GF(5) isomorph zu $(\mathbb{Z}_{5}, +_{5}, \cdot_{5})$?
6. Ist GF(16) isomorph zu $(\mathbb{Z}_{16}, +_{16}, \cdot_{16})$?
7. Ist GF(7) isomorph zu $(\mathbb{Z}_{7}, +_{7}, \cdot_{7})$?
8. Ist GF(25) isomorph zu $(\mathbb{Z}_{25}, +_{25}, \cdot_{25})$?

Antworten

GF(n) ist für jede Primzahlpotenz n ein Körper und ist ansonsten nicht definiert. GF(n) ist isomorph zu $(\mathbb{Z}_n, +_n, \cdot_n)$ genau dann, wenn n prim ist. Wenn n keine Primzahl ist, dann ist $(\mathbb{Z}_n, +_n, \cdot_n)$ kein Körper und kann demnach nicht isomorph zu GF(n) sein.

1. Ja! 11 ist prim.
2. Nein! $27 = 3^3$ ist nicht prim.
3. Ja! 13 ist prim.
4. Nein! $9 = 3^2$ ist nicht prim.
5. Ja! 5 ist prim.
6. Nein! $16 = 2^4$ ist nicht prim.
7. Ja! 7 ist prim.
8. Nein! $25 = 5^2$ ist nicht prim.

Quizfragen

Sei $p \in \mathbb{Z}_5[x]$ ein Polynom mit $p = x^3 + 4x^2 + 3x + 2$.

1. Wie viele Elemente enthält $\mathbb{Z}_5[x]_p$?
2. Wie sieht die eindeutige Faktorisierung von p aus?
3. Welche der folgenden Polynomen $a, b, c \in \mathbb{Z}_5[x]$ sind Nullteiler in $(\mathbb{Z}_5[x]_p, +_p, \cdot_p)$?

$$a = 2x^2 + 1,$$
$$b = x^2 + 3x + 2,$$
$$c = x^2 + x + 3.$$

1. $|\mathbb{Z}_5[x]_3| = 5^3 = 125$.
2. Nullstelle 1 raten und p durch $(x+4)$ dividieren ($x-1 = x+4$ in $\mathbb{Z}_5$). Wir erhalten $p : (x+4) = x^2+3$, was nicht weiter faktorisierbar ist, weil es keine Nullstellen besitzt. Es folgt:

$$p = (x+4)(x^2+3).$$

3. Es gilt:

$$\begin{aligned} a &= 2x^2+1 = 2(x^2+3), \\ b &= x^2+3x+2 = (x+1)(x+2), \\ c &= x^2+x+3 = (x+2)(x+4). \end{aligned}$$

Die Polynome a und c haben einen gemeinsamen Faktor mit p und sind somit Nullteiler in $(\mathbb{Z}_5[x]_p, +_p, \cdot_p)$.

Charakteristik

Die Charakteristik $\text{char}(K)$ eines Körpers $K = (S, \oplus, \odot)$ ist die additive Ordnung des multiplikativen neutralen Elements:

$$\text{char}(K) := \text{ord}_{\oplus}(1).$$

Die Charakteristik eines endlichen Körpers ist immer eine Primzahl!

Info

Die Notation „$\text{ord}_{\oplus}$“ dient dazu, die Ordnung eines Elements in $(S, \oplus)$ von der in $(S \setminus \{0\}, \odot)$ zu unterscheiden. Beispielsweise gilt:

- $\text{ord}_{\oplus}(0) = 1$, da 0 das neutrale Element bezüglich $\oplus$ ist,
- $\text{ord}_{\odot}(1) = 1$, da 1 das neutrale Element bezüglich $\odot$ ist, und
- $\text{ord}_{\odot}(0) = \infty$, weil kein $n \in \mathbb{N}$ mit $0^n = 1$ existiert (s. Folie 974).

Beispiele

Seien $d, n \in \mathbb{N}$ mit n prim.

- Die Charakteristik von $(\mathbb{Z}_n, +_n, \cdot_n)$ ist n.
- Die Charakteristik von $\mathrm{GF}(n^d)$ ist ebenfalls n.

Welche Charakteristik besitzen folgende Körper?

1. GF(4).
2. GF(9).
3. GF(25).
4. GF(8).
5. GF(27).
6. GF(7).
7. GF(3).
8. GF(16).
9. GF(5).
10. GF(32).
11. GF(2).

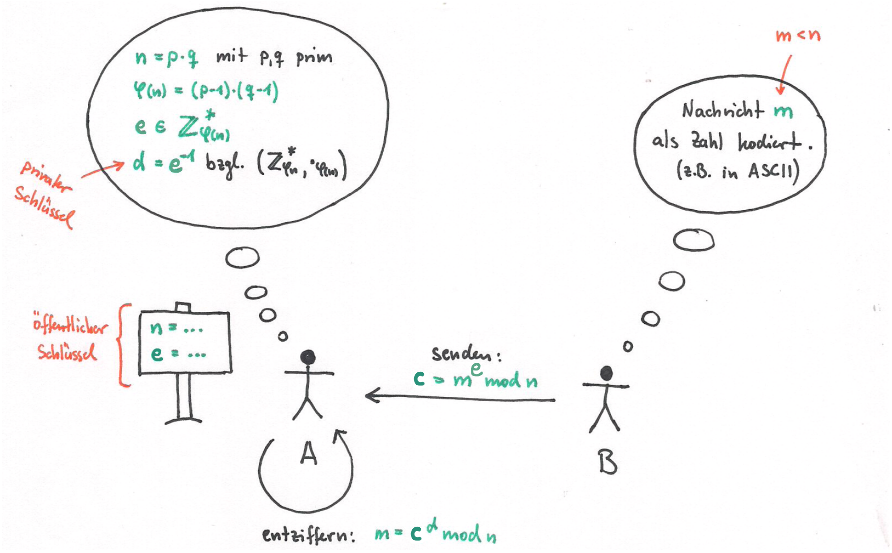
Quizfragen

1. $\mathrm{char}(\mathrm{GF}(4)) = \mathrm{char}(\mathrm{GF}(2^2)) = 2$.
2. $\mathrm{char}(\mathrm{GF}(9)) = \mathrm{char}(\mathrm{GF}(3^2)) = 3$.
3. $\mathrm{char}(\mathrm{GF}(25)) = \mathrm{char}(\mathrm{GF}(5^2)) = 5$.
4. $\mathrm{char}(\mathrm{GF}(8)) = \mathrm{char}(\mathrm{GF}(2^3)) = 2$.
5. $\mathrm{char}(\mathrm{GF}(27)) = \mathrm{char}(\mathrm{GF}(3^3)) = 3$.
6. $\mathrm{char}(\mathrm{GF}(7)) = \mathrm{char}(\mathrm{GF}(7^1)) = 7$.
7. $\mathrm{char}(\mathrm{GF}(3)) = \mathrm{char}(\mathrm{GF}(3^1)) = 3$.
8. $\mathrm{char}(\mathrm{GF}(16)) = \mathrm{char}(\mathrm{GF}(2^4)) = 2$.
9. $\mathrm{char}(\mathrm{GF}(5)) = \mathrm{char}(\mathrm{GF}(5^1)) = 5$.
10. $\mathrm{char}(\mathrm{GF}(32)) = \mathrm{char}(\mathrm{GF}(2^5)) = 2$.
11. $\mathrm{char}(\mathrm{GF}(2)) = \mathrm{char}(\mathrm{GF}(2^1)) = 2$.

Themenübersicht

RSA Kryptoverfahren

Ziel: Bob (B) möchte Alice (A) eine geheime Nachricht m senden.



Infos

- Die Nachricht m (engl. *message*) stellt in der Regel ein einziges Zeichen dar, welches als Zahl kodiert wurde (z.B. mit ASCII, ANSI, Unicode oder UTF-8).
- Die verschlüsselte Nachricht c (engl. *cypher text*) wird Geheimtext oder Chiffrat genannt.
- (n, e) ist der öffentliche Schlüssel von Alice.
- d ist der private Schlüssel von Alice.
- $f_e : \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_n$ mit $f_e(x) = x^e \bmod n$ ist die Verschlüsselungsfunktion.
- $f_d : \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_n$ mit $f_d(x) = x^d \bmod n$ ist die Entschlüsselungsfunktion.
- e und d heißen auf Englisch *encryption key* und *decryption key*.

- Die Werte von n und e stehen Alice, Bob und allen anderen Gesprächsteilnehmern zur Verfügung.
- Wer die Primfaktoren p und q von n kennt, kann sehr leicht $\varphi(n) = (p-1)(q-1)$ berechnen. Mit φ und e kommt man mithilfe des erweiterten euklidischen Algorithmus sehr einfach auf d.
- Jeder, der den Wert von d kennt, könnte die Nachrichten entziffern, die an Alice addressiert worden sind.
- Jeder Teilnehmer hat verschiedene Werte für n, e und d. Möchte Alice also auf Bobs Nachricht antworten, so muss sie dafür den öffentlichen Schlüssel von Bob benutzen.
- Dieses Verfahren ist sicher, solange man die Zahl n so gigantisch groß wählt, dass man aus n nicht so einfach auf die Primfaktoren p und q schließen kann.

Beispiel

Sei $(n, e) = (22, 7)$ der öffentliche Schlüssel von Alice und $d = 3$ ihr privater Schlüssel. Bob möchte ihr eine als Zahl $m = 13$ kodierte Nachricht schicken. Folgende Fragen sind wichtig:

1. Ist $n = 22$ zulässig?
2. Ist $e = 7$ zulässig?
3. Ist $d = 3$ zulässig?
4. Wie verschlüsselt Bob seine Nachricht m?
5. Wie entschlüsselt Alice den Geheimtext c?

1. $n = 22$ ist zulässig, weil 22 aus genau zwei Primfaktoren besteht: $p = 2$ und $q = 11$. Es folgt:
$$\varphi(22) = (2-1)(11-1) = 10.$$
2. $e = 7$ ist zulässig, weil 10 und 7 teilerfremd sind. Es gilt also $\mathrm{ggT}(10, 7) = 1$ und somit $7 \in \mathbb{Z}_{10}^*$ (s. nächste Folie).
3. $d = 3$ ist zulässig, weil 3 das multiplikative inverse Element von 7 in $(\mathbb{Z}_{10}^*, \cdot_{10})$ ist (s. nächste Folie).
4. Bob verschlüsselt seine Nachricht $m = 13$ wie folgt:
$$c = m^e \bmod n = 13^7 \bmod 22 = 7.$$
5. Alice entschlüsselt die Nachricht $c = 7$ wie folgt:
$$m = c^d \bmod n = 7^3 \bmod 22 = 13.$$

Für die Beantwortung der Fragen 2. und 3. sind der euklidische Algorithmus und seine Erweiterung hilfreich:

r_i	s_i	t_i
10	-	3
7	1	-2
3	2	1
1	3	0
0	-	-

Dann gilt $10 \cdot (-2) + 7 \cdot 3 = 1$ und daher

$$7^{-1} = 3 \bmod 10 = 3.$$

Quizfrage

Alice benutzt den öffentlichen Schlüssel $(n, e) = (85, 43)$ und empfängt von Bob den Geheimtext $c = 5$.

Was war die ursprüngliche Nachricht m?

Antwort

85 enthält die Primfaktoren $p = 5$ und $q = 17$. Daraus folgt:

$$\varphi(85) = (5-1)(17-1) = 4 \cdot 16 = 64.$$

Wir benutzen den erweiterten euklidischen Algorithmus, um den privaten Schlüssel $d = e^{-1}$ zu bestimmen:

r_i	s_i	t_i
64	-	3
43	1	-2
21	2	1
1	21	0
0	-	-

Das inverse Element zu $e = 43$ ist somit $d = 3 \bmod 64 = 3$ und die ursprüngliche Nachricht lautet: $m = c^d \bmod n = 5^3 \bmod 85 = 125 \bmod 85 = 40$.

Eindeutigkeit der Verschlüsselung

Die Verschlüsselungsfunktion f_e ist bijektiv und somit eine Permutation über $\mathbb{Z}_n$. Dies ist sehr wichtig für das Verfahren, denn nur so kann eine Entschlüsselungsfunktion f_d mit $f_d = f_e^{-1}$ überhaupt existieren. Wäre f_e nicht bijektiv, dann wäre die Entschlüsselung m einer verschlüsselten Nachricht c nicht eindeutig.

Beispiel (nochmal)

Sei $(22, 7)$ wieder der öffentliche Schlüssel von Alice und $d = 3$ ihr privater Schlüssel. Wir wollen überprüfen, dass $f_e(x) = x^e \bmod n$ tatsächlich eine Permutation ist und dass $f_d(x) = x^d \bmod n$ die Umkehrfunktion von f_e ist.

Für $f_e(x) = x^e \bmod n$ erhält man:

$$
\begin{array}{rcrcr}
f(0) & = & 0^7 \bmod 22 & = & 0 \\
f(1) & = & 1^7 \bmod 22 & = & 1 \\
f(2) & = & 2^7 \bmod 22 & = & 18 \\
f(3) & = & 3^7 \bmod 22 & = & 9 \\
f(4) & = & 4^7 \bmod 22 & = & 16 \\
f(5) & = & 5^7 \bmod 22 & = & 3 \\
f(6) & = & 6^7 \bmod 22 & = & 8 \\
f(7) & = & 7^7 \bmod 22 & = & 17 \\
f(8) & = & 8^7 \bmod 22 & = & 2 \\
f(9) & = & 9^7 \bmod 22 & = & 15 \\
f(10) & = & 10^7 \bmod 22 & = & 10
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rcrcr}
f(11) & = & 11^7 \bmod 22 & = & 11 \\
f(12) & = & 12^7 \bmod 22 & = & 12 \\
f(13) & = & 13^7 \bmod 22 & = & 7 \\
f(14) & = & 14^7 \bmod 22 & = & 20 \\
f(15) & = & 15^7 \bmod 22 & = & 5 \\
f(16) & = & 16^7 \bmod 22 & = & 14 \\
f(17) & = & 17^7 \bmod 22 & = & 19 \\
f(18) & = & 18^7 \bmod 22 & = & 6 \\
f(19) & = & 19^7 \bmod 22 & = & 13 \\
f(20) & = & 20^7 \bmod 22 & = & 4 \\
f(21) & = & 21^7 \bmod 22 & = & 21
\end{array}
$$

Als Permutation:

$$f_e = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 & 19 & 20 & 21 \\ 0 & 1 & 18 & 9 & 16 & 3 & 8 & 17 & 2 & 15 & 10 & 11 & 12 & 7 & 20 & 5 & 14 & 19 & 6 & 13 & 4 & 21 \end{pmatrix}$$

Für $f_d(x) = x^d \bmod n$ erhält man:

$$
\begin{array}{rcrcr}
f(0) & = & 0^3 \bmod 22 & = & 0 \\
f(1) & = & 1^3 \bmod 22 & = & 1 \\
f(2) & = & 2^3 \bmod 22 & = & 8 \\
f(3) & = & 3^3 \bmod 22 & = & 5 \\
f(4) & = & 4^3 \bmod 22 & = & 20 \\
f(5) & = & 5^3 \bmod 22 & = & 15 \\
f(6) & = & 6^3 \bmod 22 & = & 18 \\
f(7) & = & 7^3 \bmod 22 & = & 13 \\
f(8) & = & 8^3 \bmod 22 & = & 6 \\
f(9) & = & 9^3 \bmod 22 & = & 3 \\
f(10) & = & 10^3 \bmod 22 & = & 10
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rcrcr}
f(11) & = & 11^3 \bmod 22 & = & 11 \\
f(12) & = & 12^3 \bmod 22 & = & 12 \\
f(13) & = & 13^3 \bmod 22 & = & 19 \\
f(14) & = & 14^3 \bmod 22 & = & 16 \\
f(15) & = & 15^3 \bmod 22 & = & 9 \\
f(16) & = & 16^3 \bmod 22 & = & 4 \\
f(17) & = & 17^3 \bmod 22 & = & 7 \\
f(18) & = & 18^3 \bmod 22 & = & 2 \\
f(19) & = & 19^3 \bmod 22 & = & 17 \\
f(20) & = & 20^3 \bmod 22 & = & 15 \\
f(21) & = & 21^3 \bmod 22 & = & 21
\end{array}
$$

Als Permutation:

$$f_d = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 & 19 & 20 & 21 \\ 0 & 1 & 8 & 5 & 20 & 15 & 18 & 13 & 6 & 3 & 10 & 11 & 12 & 19 & 16 & 9 & 4 & 7 & 2 & 17 & 14 & 21 \end{pmatrix}$$

f_d ist tatsächlich die Umkehrfunktion von f_e:

$$f_e = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 & 19 & 20 & 21 \\ 0 & 1 & 18 & 9 & 16 & 3 & 8 & 17 & 2 & 15 & 10 & 11 & 12 & 7 & 20 & 5 & 14 & 19 & 6 & 13 & 4 & 21 \end{pmatrix}$$

$$f_d = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 & 19 & 20 & 21 \\ 0 & 1 & 8 & 5 & 20 & 15 & 18 & 13 & 6 & 3 & 10 & 11 & 12 & 19 & 16 & 9 & 4 & 7 & 2 & 17 & 14 & 21 \end{pmatrix}$$

Du hast es geschafft!

DS ♡ dich sehr :-)

Themenübersicht

- Nicht klausurrelevant
  - Diskrete Analysis
  - Rekursionsgleichungen
  - Graphenalgorithmen
  - Fouriertransformation

Themenübersicht

Themenübersicht

Wichtige Operatoren

Sei $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ die Menge aller Funktionen von $\mathbb{Z}$ nach $\mathbb{C}$. Die Operatoren

$$E, \Delta, \nabla, I : \mathbb{C}^{\mathbb{Z}} \to \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$$

operieren auf solche Funktionen, d.h. sie erwarten eine Funktion von $\mathbb{Z}$ nach $\mathbb{C}$ als Argument und liefern ebenfalls eine Funktion von $\mathbb{Z}$ nach $\mathbb{C}$. Für eine beliebige Funktion $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ gilt:

$$\begin{aligned} E\, f(x) &:= f(x+1), \\ I\, f(x) &:= f(x), \\ \Delta\, f(x) &:= f(x+1) - f(x), \\ \nabla\, f(x) &:= f(x) - f(x-1). \end{aligned}$$

Infos

- Die Funktion f bildet nur auf $\mathbb{C}$ ab, damit sie möglichst allgemein gehalten wird. Das heißt nicht unbedingt, dass sie von diesen bösen imaginären Zahlen heimgesucht wird!
- Δ heißt „Delta“ und ∇ „Nabla“.
- E und I sind umkehrbar. Es gilt:

$$E^{-1} f(x) = f(x-1) \qquad \text{und} \qquad I^{-1} f(x) = f(x)$$

- Δ und ∇ sind nicht umkehrbar, weil sie nicht bijektiv sind. Es gilt z.B.:

$$\Delta\, 3x - 2 = (3(x+1) - 2) - (3x - 2) = 3$$
$$\Delta\, 3x + 5 = (3(x+1) + 5) - (3x + 5) = 3$$

Mehr Infos

Für beliebige Funktionen f, g und Zahlen $n \in \mathbb{N}_0$ und $a \in \mathbb{C}$ gibt es folgende Abkürzungen:

- $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$
- $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$
- $(af)(x) = a \cdot f(x)$
- $(fg)(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x))$
- $f^n(x) = (\underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{n \text{ mal}})(x)$

Weil Δ, ∇, E und I auch Funktionen sind, funktionieren diese Abkürzungen auch für sie.

Beispiele

- $\Delta\, x(x+1) = (x+1)(x+2) - x(x+1) = x^2 + 3x + 2 - x^2 - x = 2x + 2$
- $E^3\ 5^x = E\,E\,E\,5^x = E\,E\,5^{x+1} = E\,5^{x+2} = 5^{x+3}$
- $E \nabla x^2 = E\,(x^2 - (x-1)^2) = (x+1)^2 - x^2 = 2x + 1$
- $(3E^{-1} + I)(2x) = 3E^{-1}(2x) + I(2x) = 3(2(x-1)) + 2x = 8x - 6$

Erinnerung

$$
\begin{aligned}
E\, f(x) &:= f(x+1), \\
I\, f(x) &:= f(x), \\
\Delta\, f(x) &:= f(x+1) - f(x), \\
\nabla\, f(x) &:= f(x) - f(x-1).
\end{aligned}
$$

Quizfragen

Was ergeben folgende Operationen?

1. $\Delta(2x + 1)$,
2. $\nabla(x + 3)$,
3. $\Delta(x^2 - x)$,
4. $\nabla(x^2 - x)$,
5. $\Delta(x^2 + x)$,
6. $\nabla(x^2 + x)$,
7. $E(x^2) - I(2x)$,
8. $E^3 1$.

Antworten

1. $\Delta(2x+1) = (2(x+1)+1) - (2x+1) = 2$,
2. $\nabla(x+3) = (x+3) - ((x-1)+3) = 1$,
3. $\Delta(x^2-x) = ((x+1)^2 - (x+1)) - (x^2-x) = 2x$,
4. $\nabla(x^2-x) = (x^2-x) - ((x-1)^2 - (x-1)) = 2x-2$,
5. $\Delta(x^2-x) = ((x+1)^2 + (x+1)) - (x^2+x) = 2x+2$,
6. $\nabla(x^2-x) = (x^2+x) - ((x-1)^2 + (x-1)) = 2x$,
7. $E(x^2) - I(2x) = (x+1)^2 - 2x = x^2+1$,
8. $E^3 1 = E(E(E(1))) = E(E(1)) = E(1) = 1$.

Noch eine Quizfrage

Sei $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} 3 - x & \text{falls } x \text{ gerade} \\ x - 3 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Was ist $\Delta f(x)$?

Antwort

Falls x gerade, dann ist $x+1$ ungerade und es gilt

$$\Delta f(x) = f(x+1) - f(x) = (x+1) - 3 - (3-x) = 2x - 5.$$

Falls x ungerade, dann ist $x+1$ gerade und es gilt

$$\Delta f(x) = f(x+1) - f(x) = 3 - (x+1) - (x-3) = 5 - 2x.$$

Daraus folgt:

$$\Delta f(x) = \begin{cases} 2x-5 & \text{falls } x \text{ gerade} \\ 5-2x & \text{sonst.} \end{cases}$$

Alternativ kann man $f(x) = (-1)^x \cdot (3-x)$ schreiben. Daraus folgt:

$$\begin{aligned} \Delta f(x) &= f(x+1) - f(x) \\ &= (-1)^{x+1} \cdot (3-(x+1)) - (-1)^x \cdot (3-x) \\ &= (-1)^x \cdot (2x-5). \end{aligned}$$

Mehr Quizfragen

Sei $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ eine beliebige Funktion.

1. Gilt $(E \circ \nabla)(f(x)) = \Delta(f(x))$?
2. Gilt $(E \circ \Delta)(f(x)) = \nabla(f(x))$?
3. Gilt $(E \circ \Delta)(f(x)) = (\Delta \circ E)(f(x))$?
4. Gilt $(E \circ \nabla)(f(x)) = (\nabla \circ E)(f(x))$?
5. Gilt $(\Delta \circ \nabla)(f(x)) = (\nabla \circ \Delta)(f(x))$?

Mehr Antworten

1. Ja.
2. Nein.
3. Ja.
4. Ja.
5. Ja.

Erinnerung aus der Schule

Die Ableitung $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$ bzw. $f'(x)$ einer Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ war:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

äquivalent dazu ist der Ausdruck

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x) - f(x-h)}{h}.$$

Hier kann man h gegen 0 laufen lassen, weil der Abstand zwischen zwei reellen Zahlen beliebig klein sein kann. Man nennt $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ Differentialoperator.

Diskrete Ableitung

In $\mathbb{Z}$ ist der kleinste Abstand zwischen zwei Zahlen 1. Setzt man also $h = 1$ so bekommt man für $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ zwei diskrete Analoga zur Ableitung, nämlich Δ und ∇:

$$\lim_{h \to 1} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{f(x+1) - f(x)}{1} = f(x+1) - f(x) = \Delta f(x),$$
$$\lim_{h \to 1} \frac{f(x) - f(x-h)}{h} = \frac{f(x) - f(x-1)}{1} = f(x) - f(x-1) = \nabla f(x).$$

Man nennt Δ Vorwärts- und ∇ Rückwärts-Differenzenoperator.

n-te Ableitung

Für eine beliebige Funktion $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ gilt:

$$\Delta^n f(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} f(x+k)$$

Beispiel

Für $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ mit $f(x) = x^3$ gilt:

$$\begin{aligned}
\Delta^2 x^3 &= \sum_{k=0}^{2} (-1)^{2-k} \binom{2}{k} (x+k)^3 \\
&= (-1)^{2-0} \binom{2}{0} (x+0)^3 + (-1)^{2-1} \binom{2}{1} (x+1)^3 + (-1)^{2-2} \binom{2}{2} (x+2)^3 \\
&= x^3 - 2(x+1)^3 + (x+2)^3 \\
&= 6x + 6.
\end{aligned}$$

Fallende und steigende Faktorielle (ausführlicher)

Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Aus Folie 622 wissen wir:

$$x^{\underline{0}} := 1, \qquad x^{\underline{n}} := x \cdot (x-1) \cdot (x-2) \cdot \ldots \cdot (x-n+1),$$
$$x^{\overline{0}} := 1, \qquad x^{\overline{n}} := x \cdot (x+1) \cdot (x+2) \cdot \ldots \cdot (x+n-1).$$

D.h. es gelten folgende Zusammenhänge:

$$x^{\underline{n}} = (x-n+1)^{\overline{n}}, \qquad x^{\overline{n}} = (x+n-1)^{\underline{n}}.$$

Für negative Exponenten gilt:

$$x^{\underline{-n}} := \frac{1}{(x+1)^{\overline{n}}} = \frac{1}{(x+n)^{\underline{n}}}, \qquad x^{\overline{-n}} := \frac{1}{(x-1)^{\underline{n}}} = \frac{1}{(x-n)^{\overline{n}}}.$$

Daraus folgt, dass für ein beliebiges $k \in \mathbb{Z}$ gilt:

$$(x-k) \cdot x^{\underline{k}} = x^{\underline{k+1}}, \qquad (x+k) \cdot x^{\overline{k}} = x^{\overline{k+1}}.$$

Das schöne hier ist: k kann (im Gegensatz zu n) auch negativ sein!

Erinnerung aus der Schule

Eine reellwertige Funktion F mit $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F(x) = f(x)$ hieß Stammfunktion von f und wir schrieben immer:

$$F(x) = \int f(x)\,dx,$$

wobei oft auch ein $c \in \mathbb{C}$ dazu addiert wurde. Außerdem galt immer:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Dies entsprach der Fläche unterhalb von $f(x)$ zwischen a und b.

Summation

Eine Funktion $F : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ mit $\Delta F(x) = f(x)$ nennt man Summation (auch diskrete Stammfunktion) von $f(x)$ und wir schreiben analog zur normalen Stammfunktion:

$$F(x) = \sum f(x),$$

wobei oft auch ein $c \in \mathbb{C}$ dazu addiert wird. Außerdem gilt:

$$\sum_{x=a}^{b} f(x) = F(b+1) - F(a).$$

Dies entspricht einer gewöhnlichen Summe

$$f(a) + f(a+1) + f(a+2) + \ldots + f(b).$$

Info

Falls $\Delta F(x) = f(x)$ gilt, so ist $F(x)$ nicht *die* diskrete Stammfunktion von $f(x)$, sondern lediglich *eine* diskrete Stammfunktion, denn für jedes $c \in \mathbb{C}$ ist $F(x) + c$ eine mögliche diskrete Stammfunktion von $f(x)$.

Meistens ist es egal, welche diskrete Stammfunktion man verwendet. Deswegen dürfen wir das blöde c oft einfach weglassen!

Diskrete Ableitungs- und Stammfunktionsregeln

Für die Funktionen $x^{\underline{n}}$, $x^{\overline{n}}$, a^x und $\binom{x}{m}$ gibt es folgende Rechenregeln:

$$\Delta\, x^{\underline{n}} = n \cdot x^{\underline{n-1}} \qquad (n \in \mathbb{Z}), \qquad \sum x^{\underline{n}} = \frac{x^{\underline{n+1}}}{n+1} \qquad (n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}),$$

$$\Delta\, x^{\overline{n}} = n \cdot (x+1)^{\overline{n-1}} \qquad (n \in \mathbb{Z}), \qquad \sum x^{\overline{n}} = \frac{(x-1)^{\overline{n+1}}}{n+1} \qquad (n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}),$$

$$\Delta\, a^x = a^x(a-1) \qquad (a \in \mathbb{C}), \qquad \sum a^x = \frac{a^x}{a-1} \qquad (a \in \mathbb{C}),$$

$$\Delta \binom{x}{m} = \binom{x}{m-1} \qquad (m \in \mathbb{N}), \qquad \sum \binom{x}{m} = \binom{x}{m+1} \qquad (m \in \mathbb{N}).$$

Nicht vergessen

$\sum f(x)$ ist nicht die einzige diskrete Stammfunktion von $f(x)$, sondern nur eine mögliche!

Beispiel

Wir bestimmen die Lösung (in Abhängigkeit von n) der Summe

$$\sum_{x=1}^{n} x^{\overline{2}} = 2 + 6 + 12 + 20 + \ldots + n(n+1).$$

Zuerst bestimmen wir eine Stammfunktion $F(x)$ für $f(x) = x^{\overline{2}}$:

$$F(x) = \sum x^{\overline{2}} = \frac{(x-1)^{\overline{2+1}}}{2+1} = \frac{(x-1)^{\overline{3}}}{3}.$$

Dann setzen wir die Grenzen ein:

$$\sum_{x=1}^{n} x^{\overline{2}} = F(n+1) - F(1) = \frac{n^{\overline{3}}}{3} - \frac{0^{\overline{3}}}{3} = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

Quizfragen

Was sind die Ergebnisse folgender Summen in Abhängigkeit von n?

1. $\sum_{x=0}^{n+1} x(x-1)$,
2. $\sum_{x=0}^{n-1} 3^x$,
3. $\sum_{x=0}^{n} \binom{x}{9}$.

Antworten

1. Info: $x(x-1) = x^{\underline{2}}$.
   $\sum x^{\underline{2}} = \frac{x^{\underline{3}}}{3}$
   $\rightsquigarrow \sum_{x=0}^{n+1} x(x-1) = \sum_{x=0}^{n+1} x^{\underline{2}} = \frac{(n+2)^{\underline{3}}}{3} - \frac{0^{\underline{3}}}{3} = \frac{(n+2)(n+1)n}{3}$.
2. $\sum 3^x = \frac{3^x}{3-1} = \frac{3^x}{2}$
   $\rightsquigarrow \sum_{x=0}^{n-1} 3^x = \frac{3^n}{2} - \frac{3^0}{2} = \frac{3^n-1}{2}$.
3. $\sum \binom{x}{9} = \binom{x}{9+1} = \binom{x}{10}$
   $\rightsquigarrow \sum_{x=0}^{n} \binom{x}{9} = \binom{n+1}{10} - \binom{0}{10} = \binom{n+1}{10}$.

Themenübersicht

Erinnerung aus der Schule

Eine der beliebtesten Integrationsregeln war immer die partielle Integration:

$$\int u(x) \cdot v'(x)\, dx = u(x) \cdot v(x) - \int u'(x) \cdot v(x)\, dx.$$

Mit Grenzen:

$$\int_a^b u(x) \cdot v'(x)\, dx = [u(x) \cdot v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x) \cdot v(x)\, dx,$$

wobei $[h(x)]_a^b = h(b) - h(a)$.

Partielle Summation

Unsere beliebteste Summationsregel wird die Partielle Summation sein:

$$\sum u(x) \cdot \Delta\, v(x) = u(x) \cdot v(x) - \sum E\, v(x) \cdot \Delta\, u(x).$$

Mit Grenzen:

$$\sum_{x=a}^{b} u(x) \cdot \Delta\, v(x) = [u(x) \cdot v(x)]_a^{b+1} - \sum_{x=a}^{b} E\, v(x) \cdot \Delta\, u(x).$$

wobei $[h(x)]_a^b = h(b) - h(a)$.

Tipp

Bei der partiellen Summation sollte man die Funktion $u(x)$ so wählen, dass sie nach dem Ableiten einfacher wird oder sogar komplett verschwindet.

Beispiel

Wir bestimmen mithilfe der partiellen Summation das Ergebnis der Summe

$$\sum_{x=1}^{n} x \cdot 2^x.$$

Dazu haben wir zwei Möglichkeiten. Entweder:

1. Wir definieren $u(x) := x$ und $\Delta\, v(x) := 2^x$ und bestimmen zuerst eine mögliche Stammfunktion von $f(x) = x \cdot 2^x$ mithilfe der partiellen Summation:

   $$F(x) = \sum x \cdot 2^x = x \cdot \frac{2^x}{2-1} - \sum 2^{x+1} \cdot 1 = x \cdot 2^x - \frac{2^{x+1}}{2-1} = (x-2) \cdot 2^x.$$

   Danach setzen wir die Grenzen ein und erhalten:

   $$\sum_{x=1}^{n} x \cdot 2^x = F(n+1) - F(1) = (n-1) \cdot 2^{n+1} - (-1) \cdot 2^1 = (n-1) \cdot 2^{n+1} + 2.$$

Oder:

2. Wir definieren $u(x) := x$ und $\Delta\, v(x) := 2^x$ und bestimmen den Wert von $\sum_{x=1}^{n} x \cdot 2^x$ direkt mithilfe der partiellen Summation mit Grenzen:

$$\begin{aligned}\sum_{x=1}^{n} x \cdot 2^x &= [x \cdot 2^x]_1^{n+1} - \sum_{x=1}^{n} 2^{x+1} \cdot 1 \\ &= [x \cdot 2^x]_1^{n+1} - \left[\frac{2^{x+1}}{2-1}\right]_1^{n+1} \\ &= ((n+1)2^{n+1} - 2) - (2^{n+2} - 2^2) \\ &= (n-1) \cdot 2^{n+1} + 2.\end{aligned}$$

Quizfragen

Was sind die Ergebnisse folgender Summen?

1. $\sum_{k=1}^{n} k2^k$,
2. $\sum_{k=1}^{n} 9k4^k$,
3. $\sum_{k=1}^{n} k(k-1)3^k$.

Benutze die partielle Summation.

Antworten

1. $\sum k2^k = k\frac{2^k}{2-1} - \sum E(\frac{2^k}{2-1})((k+1)-k) = k2^k - \sum 2^{k+1}\cdot 1 = k2^k - 2\sum 2^k =$
   $k2^k - 2\cdot\frac{2^k}{2-1} = (k-2)2^k$
   $\rightsquigarrow \sum_{k=1}^{n} k2^k = (((n+1)-2)2^{n+1}) - ((1-2)2^1) = (n-1)2^{n+1} + 2.$
2. $\sum 9k4^k = 9k\frac{4^k}{4-1} - \sum E(\frac{4^k}{4-1})(9(k+1)-9k) = 3k4^k - \sum\frac{4^{k+1}}{3}\cdot 9 =$
   $3k4^k - 3\frac{4^{k+1}}{4-1} = 3k4^k - 4^{k+1} = (3k-4)4^k$
   $\rightsquigarrow \sum_{k=1}^{n} 9k4^k = ((3(n+1)-4)4^{n+1}) - ((3\cdot 1-4)4^1) = (3n-1)4^{n+1} + 4.$
3. $\sum k(k-1)3^k = k(k-1)\frac{3^k}{2} - \sum 2k\frac{3^{k+1}}{2} = k(k-1)\frac{3^k}{2} - \sum k3^{k+1}$
   $\sum k3^{k+1} = k\frac{3^{k+1}}{2} - \sum 1\frac{3^{k+2}}{2} = k\frac{3^{k+1}}{2} - \frac{3^{k+2}}{4}$
   $\rightsquigarrow \sum k(k-1)3^k = k(k-1)\frac{3^k}{2} - k\frac{3^{k+1}}{2} + \frac{3^{k+2}}{4} = \frac{1}{2}(k(k-4)+\frac{9}{2})3^k$
   $\rightsquigarrow \sum_{k=1}^{n} k(k-1)3^k = (\frac{1}{2}((n+1)(n-3)+\frac{9}{2})3^{n+1}) - (\frac{1}{2}(1(1-4)+\frac{9}{2})3^1) =$
   $\frac{1}{2}(n^2-2n+\frac{3}{2})3^{n+1} - \frac{9}{4}.$

Vektor-Matrix-Multiplikation

Seien $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$ eine Matrix mit m Zeilen und m Spalten und $u, v \in \mathbb{R}^m$ zwei Vektoren der Länge m. Es gilt:

$$A \cdot u = v \quad \Longleftrightarrow \quad \forall n \in [m] : v_n = \sum_{k=1}^{m} a_{n,k} \cdot u_k$$

Beispiel

Beispielsweise gilt für $m = 3$:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix}}_{A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}}_{u \in \mathbb{R}^3} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{1,1}u_1 + a_{1,2}u_2 + a_{1,3}u_3 \\ a_{2,1}u_1 + a_{2,2}u_2 + a_{2,3}u_3 \\ a_{3,1}u_1 + a_{3,2}u_2 + a_{3,3}u_3 \end{pmatrix}}_{v \in \mathbb{R}^3}.$$

Inverse Matrizen

Seien $A, B \in \mathbb{R}^{m \times m}$ zwei $m \times m$-Matrizen. Fall $A \cdot B = I_m$ gilt, nennt man B die Inverse Matrix von A und schreibt:

$$A^{-1} = B$$

Dabei ist $I_m \in \mathbb{R}^{m \times m}$ die Einheitsmatrix:

$$I_m = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

I_m ist sowas wie das Einselement der $m \times m$-Matrizen und A und B multiplikative inverse Elemente voneinander

Infos

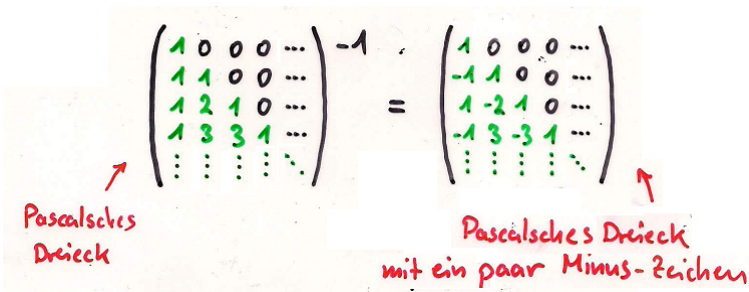
- Auch unendliche Matrizen können Inverse Matrizen besitzen. Die unendliche Einheitsmatrix wird durch das Kronecker-Delta dargestellt (s. Folie 726).
- Ob man die Indizierung der Komponenten eines Vektors oder einer Matrix mit 1 oder mit 0 beginnt, ist völlig irrelevant. Die Formel wird entsprechend angepasst.

Bimomialinversion

Für beliebige Folgen $u = (u_0, u_1, u_2, \ldots)$ und $v = (v_0, v_1, v_2, \ldots)$, bzw. Vektoren unendlicher Länge, gilt:

$$\forall n \in \mathbb{N}_0 : v_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot u_k \quad \Longleftrightarrow \quad \forall n \in \mathbb{N}_0 : u_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \cdot v_k.$$

Das heißt:

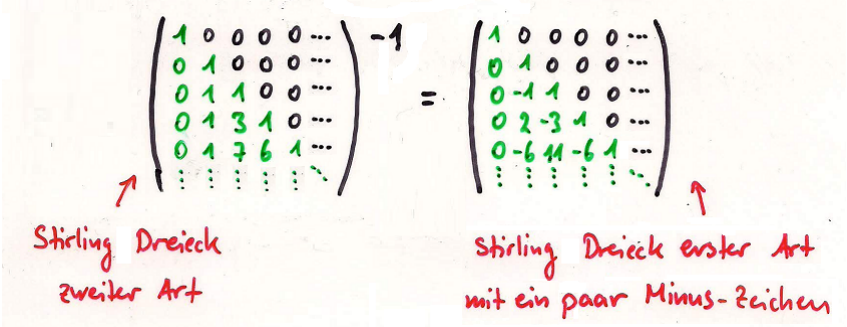


Stirling-Inversion

Für beliebige Folgen $u = (u_0, u_1, u_2, \ldots)$ und $v = (v_0, v_1, v_2, \ldots)$, bzw. Vektoren unendlicher Länge, gilt:

$$\forall n \in \mathbb{N}_0 : v_n = \sum_{k=0}^{n} S_{n,k} \cdot u_k \quad \Longleftrightarrow \quad \forall n \in \mathbb{N}_0 : u_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} s_{n,k} \cdot v_k.$$

Das heißt:



Themenübersicht

Themenübersicht

Folgen

Eine Funktion $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{C}$ wird Folge genannt. Weil der Definitionsbereich von Folgen abzählbar ist, lassen sich Folgen als indizierte Listen darstellen. Man schreibt

$$(f_n)_{n\geq 0} = (f_0, f_1, f_2, f_3, \ldots)$$

mit $f_n = f(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

Beispiele

Einige (mehr oder weniger) bekannte Folgen sind:

- Fibonacci-Folge
$$(0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \ldots),$$
- Merkwürdige Zahlen
$$(70, 836, 4030, 5830, 7192, 7912, \ldots),$$
- Superperfekte Zahlen
$$(2, 4, 16, 64, 4096, 65536, 262144, \ldots),$$
- Fröhliche Zahlen
$$(1, 7, 10, 13, 19, 23, 28, 31, 32, 44, \ldots),$$
- Glückliche Zahlen
$$(1, 3, 7, 9, 13, 15, 21, 25, 31, 33, \ldots).$$

Info

Die Folgen aus dem letzten Beispiel heißen wirklich so.

Geschlossene Ausdrücke

Oft lassen sich Folgen durch mathematische Ausdrücke vollständig beschreiben. Einen solchen Ausdruck nennen wir einen geschlossenen Ausdruck.

Beispiele

- $f_n = n^2$ ist ein geschlossener Ausdruck für die Folge

$$(f_n)_{n\geq 0} = (0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, \ldots).$$

- $f_n = 2^n - 1$ ist ein geschlossener Ausdrsuck für die Folge

$$(f_n)_{n\geq 0} = (0, 1, 3, 7, 15, 31, 63, \ldots).$$

- $f_n = (-1)^n \cdot n$ ist ein geschlossener Ausdruck für die Folge

$$(f_n)_{n\geq 0} = (0, -1, 2 - 3, 4, -5, 6, -7, 8, \ldots).$$

Infos

- Es gibt Folgen, die man zwar mit einem Algorithmus berechnen kann, aber für die es keinen geschlossenen Ausdruck gibt. Tatsächlich gibt es auch Folgen, für die es nicht mal einen Algorithmus gibt!
- Im Abschnitt „Wachstum von Funktionen“ haben wir es ausschließlich mit solchen Folgen zutun gehabt. Im Abschnitt „Beweismethoden“ (Teil Rekursionsgleichungen) haben wir die Korrektheit von gegebenen geschlossenen Ausdrücken bewiesen. In diesem Abschnitt werden wir Methoden kennenlernen, mit denen sich geschlossene Ausdrücke für bestimmte Arten von Rekursionsgleichungen finden lassen.

Quizfragen

Welche geschlossenen Ausdrücke besitzen folgende Folgen $(a_n)_{n\geq 0}$, $(b_n)_{n\geq 0}$ und $(c_n)_{n\geq 0}$?

1. Für $(a_n)_{n\geq 0}$ gilt $a_0 = 0$ und $a_n = a_{n-1} + 1$ für alle $n \geq 1$.
2. Für $(b_n)_{n\geq 0}$ gilt $b_0 = 0$ und $b_n = b_{n-1} + 2n - 1$ für alle $n \geq 1$.
3. Für $(c_n)_{n\geq 0}$ gilt $c_0 = 0$, $c_1 = -2$ und $c_n = -4 \cdot (c_{n-1} + c_{n-2})$ für alle $n \geq 1$.

Antworten

Wir berechnen die ersten Werte jeder Folge

n	0	1	2	3	4	5	6	$\cdots$
a_n	0	1	2	3	4	5	6	$\cdots$
b_n	0	1	4	9	16	25	36	$\cdots$
c_n	0	-2	8	-24	64	-160	384	$\cdots$

und erhalten folgende Vermutungen:

1. $a_n = n$
2. $b_n = n^2$
3. $c_n = n \cdot (-2)^n$

Natürlich ist das Ergebnis von c_n absolut trivial! ;-)

Lineare Rekursionsgleichungen

Wir betrachten in DS nur lineare Rekursionsgleichungen. Diese haben die Form:

$$f_{n+d} + q_1 f_{n+d-1} + q_2 f_{n+d-2} + \ldots + q_d f_n = s_n \qquad (\forall n \geq 0),$$

wobei $q_d \neq 0$ und s_n selbst eine Folge ist, z.B. $s_n = 5$, $s_n = 2^n$, etc.

Falls $s_n = 0$, dann ist die Rekursionsgleichung homogen. Ansonsten ist sie inhomogen.

Man nennt d den Grad, $q_1, q_2, \ldots, q_d$ die Koeffizienten und s_n das Störglied.

Werden die Anfangsbedingungen $f_0, f_1, \ldots, f_{d-1}$ explizit angegeben, so stellt die Rekursionsgleichung eine eindeutige Folge $(f_n)_{n \geq 0}$ dar.

Beispiele

Folgende Rekursionsgleichungen sind linear und homogen:

- Die Fibonacci-Folge kann geschrieben werden als:

$$f_{n+2} - f_{n+1} - f_n = 0 \qquad (\forall n \geq 0)$$

  mit $f_0 = 1$ und $f_1 = 1$.

- Die Folge $(c_n)_{n \geq 0}$ aus Folie 1306 kann definiert werden als:

$$c_{n+2} + 4c_{n+1} + 4c_n = 0 \qquad (\forall n \geq 0)$$

  mit $c_0 = 0$ und $c_1 = -2$.

Mehr Beispiele

Folgende Rekursionsgleichungen sind linear, aber nicht homogen:

- Die Folge $(a_n)_{n\geq 0}$ aus Folie 1306 kann definiert werden als:

$$a_{n+1} - a_n = 1 \qquad (\forall n \geq 0)$$

  mit $a_0 = 0$.

- Die Folge $(b_n)_{n\geq 0}$ aus Folie 1306 kann definiert werden als:

$$b_{n+1} - b_n = 2n + 1 \qquad (\forall n \geq 0)$$

  mit $b_0 = 0$.

Noch mehr Beispiele

Folgende Rekursionsgleichungen sind nicht linear und somit kein Teil von DS:

- Für die Fakultät $f_n = n!$ gilt:

$$f_{n+1} = n \cdot f_n \qquad (\forall n \geq 0)$$

  mit $f_0 = 1$.

- Für die Folge $(g_n)_{n \geq 0} = (2, 2, 4, 8, 32, 256, \ldots)$ gilt:

$$f_{n+2} = f_{n+1} \cdot f_n \qquad (\forall n \geq 0)$$

  mit $f_0 = 2$ und $f_1 = 2$.

Info

Einige inhomogene Rekursionsgleichungen lassen sich „homogenisieren“, d.h. in eine homogene Rekursionsgleichung überbringen. Leider funktioniert das nicht bei allen.

Themenübersicht

Charakteristisches Polynom

Zu einer gegebenen linearen homogenen Rekursionsgleichung

$$f_{n+d} + q_1 f_{n+d-1} + q_2 f_{n+d-2} + \ldots + q_d f_n = 0 \qquad (\forall n \geq 0)$$

ist das charakteristische Polynom $q^R(z)$ definiert als:

$$q^R(z) = z^d + q_1 z^{d-1} + q_2 z^{d-2} + \ldots + q_d$$

Beispiel

Die Rekursionsgleichung

$$f_{n+4} + 5f_{n+3} - 3f_{n+2} + 2f_{n+1} - f_n = 0 \qquad (\forall n \geq 0)$$

besitzt das charakteristische Polynom

$$q^R(z) = z^4 + 5z^3 - 3z^2 + 2z - 1.$$

Allgemeine Lösung

Zu einem gegebenen (faktorisierten) charakteristischen Polynom einer Rekursionsgleichung f mit Nullstellen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ und Vielfachheiten $d_1, d_2, \ldots, d_k$

$$\begin{aligned} q^R(z) &= z^d + q_1 z^{d-1} + q_2 z^{d-2} + \ldots + q_d \\ &= (z-\alpha_1)^{d_1}(z-\alpha_2)^{d_2}\ldots(z-\alpha_k)^{d_k} \end{aligned}$$

ist die allgemeine Lösung f_n der Rekursionsgleichung f

$$f_n = p_1(n)\alpha_1^n + p_2(n)\alpha_2^n + \ldots + p_k(n)\alpha_k^n \ ,$$

wobei die $p_i(n)$ Polynome über n sind mit Konstanten $c_0, c_1, \ldots, c_{d-1}$ und Grad $\text{grad}(p_i) \leq d_i - 1$.

Beispiel

Die zum charakteristischen Polynom

$$\begin{aligned} q^R(z) &= z^7 - 9z^6 + 27z^5 - 19z^4 - 48z^3 + 72z^2 + 16z - 48 \\ &= (z+1)^2(z-2)^4(z-3) \end{aligned}$$

gehörende allgemeine Lösung ist

$$f_n = \underbrace{(c_0 + c_1 n)}_{p_1(n)}(-1)^n + \underbrace{(c_2 + c_3 n + c_4 n^2 + c_5 n^3)}_{p_2(n)} 2^n + \underbrace{c_6}_{p_3(n)} 3^n.$$

Es gilt:

- $\text{grad}(p_1) = d_1 - 1 = 2 - 1 = 1$
- $\text{grad}(p_2) = d_2 - 1 = 4 - 1 = 3$
- $\text{grad}(p_3) = d_3 - 1 = 1 - 1 = 0$

Erinnerung

Man kann ein Polynom mit Unbekannter z faktorisieren, indem man eine Nullstelle α_i errät und dann das Polynom durch $(z - \alpha_i)$ teilt. Somit wird der Grad des Polynoms um 1 verringert. Das wiederholt man bis das Polynom Grad 2 hat. Dann kann man die fehlenden zwei Nullstellen beispielsweise mit der Mitternachtsformel bestimmen.

Nicht vergessen

Ein Polynom von Grad d über einem Körper K hat immer höchstens d Nullstellen in K. Falls $K = \mathbb{C}$, dann sind es immer genau d.

Methode 1

Frage: Wie löst man lineare homogene Rekursionsgleichungen?
Methode: Gegeben sei die Rekursionsgleichung:

$$f_{n+d} + q_1 f_{n+d-1} + q_2 f_{n+d-2} + \ldots + q_d f_n = 0 \qquad (\forall n \geq 0)$$

mit Anfangsbedingungen $f_0, f_1, \ldots, f_{d-1}$.

1. Charakteristisches Polynom aufstellen und über $\mathbb{C}$ faktorisieren:

$$\begin{aligned} q^R(z) &= z^d + q_1 z^{d-1} + q_2 z^{d-2} + \ldots + q_d \\ &= (z-\alpha_1)^{d_1} \cdot (z-\alpha_2)^{d_2} \cdot \ldots \cdot (z-\alpha_k)^{d_k}. \end{aligned}$$

2. Allgemeine Lösung aufstellen:

$$f_n = p_1(n)\alpha_1^n + p_2(n)\alpha_2^n + \ldots + p_k(n)\alpha_k^n$$

   mit $p_i(n)$ Polynome über n mit Konstanten $c_0, c_1, \ldots, c_{d-1}$ und $\operatorname{grad}(p_i) = d_i - 1$.

3. Allgemeine Lösung f_n für $n = 0, \ldots, d-1$ mit der jeweiligen Anfangsbedingung gleichsetzen und Gleichungssystem nach $c_0, \ldots, c_{d-1}$ lösen.

4. Die allgemeine Lösung mit eingesetzten c_i nennt man spezielle Lösung.

Beispiel

Aufgabe: Löse die lineare homogene Rekursionsgleichung

$$f_{n+3} - 4f_{n+2} + 5f_{n+1} - 2f_n = 0 \qquad (\forall n \geq 0)$$

mit Anfangsbedingungen $f_0 = 2$, $f_1 = 4$ und $f_2 = 7$.

Lösung:

1. Das charakteristisches Polynom ist:

$$q^R(z) = z^3 - 4z^2 + 5z - 2 = (z-2)(z-1)^2.$$

2. Die allgemeine Lösung ist:

$$f_n = c_0 2^n + (c_1 + c_2 n)1^n = c_0 2^n + c_1 + c_2 n.$$

3. Einsetzen von 0, 1 und 2 in f_n und Gleichsetzen mit den Anfangsbedingungen liefert:

$$\begin{array}{lcccccccc} f_0 & = & c_0 & + & c_1 & & & \stackrel{!}{=} & 2 \\ f_1 & = & 2c_0 & + & c_1 & + & c_2 & \stackrel{!}{=} & 4 \\ f_2 & = & 4c_0 & + & c_1 & + & 2c_2 & \stackrel{!}{=} & 7 \end{array}$$

   mit eindeutiger Lösung $c_0 = 1, c_1 = 1, c_2 = 1$.

4. Die spezielle Lösung ist dann:

$$f_n = 2^n + 1 + n.$$

Quizfragen

Welche Lösung besitzen folgende homogene Rekursionsgleichungen?

1. $f_0 = 2$ und $f_{n+1} - 2f_n = 0$ für alle $n \geq 0$,
2. $f_0 = 1$ und $f_{n+1} + 5f_n = 0$ für alle $n \geq 0$,
3. $f_0 = 4$, $f_1 = 0$ und $f_{n+2} - 4f_{n+1} + 4f_n = 0$ für alle $n \geq 0$,
4. $f_0 = 3$, $f_1 = 0$ und $f_{n+2} + f_{n+1} - 2f_n = 0$ für alle $n \geq 0$,
5. $f_0 = 2$, $f_1 = 4$, $f_2 = 7$ und $f_{n+3} - 4f_{n+2} + 5f_{n+1} - 2f_n = 0$ für alle $n \geq 0$,
6. $f_0 = 3$, $f_1 = 6$, $f_2 = -4$ und $f_{n+3} + 2f_{n+2} - 4f_{n+1} - 8f_n = 0$ für alle $n \geq 0$,
7. $f_0 = 1$, $f_1 = 0$, $f_2 = 3$, $f_3 = 4$ und $f_{n+4} - 4f_{n+3} + 6f_{n+2} - 4f_{n+1} + f_n = 0$ für alle $n \geq 0$.

Benutze die Methode aus Folie 1320.

Antworten (kompakt)

1. $q^R = z - 2$
   $\rightsquigarrow f_n = c_0 \cdot 2^n = 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$,
2. $q^R = z + 5$
   $\rightsquigarrow f_n = c_0 \cdot (-5)^n = (-5)^n$,
3. $q^R = z^2 - 4z + 4 = (z-2)^2$
   $\rightsquigarrow f_n = (c_0 + c_2 n) \cdot 2^n = (4 - 4n) \cdot 2^n = (1-n) \cdot 2^{n+2}$,
4. $q^R = z^2 + z - 2 = (z-1) \cdot (z+2)$
   $\rightsquigarrow f_n = c_0 \cdot 1^n + c_1 \cdot (-2)^n = 2 + (-2)^n$,
5. $q^R = z^3 - 4z^2 + 5z - 2 = (z-1)^2 \cdot (z-2)$
   $\rightsquigarrow f_n = (c_0 + c_1 n) \cdot 1^n + c_2 \cdot 2^n = 1 + n + 2^n$,
6. $q^R = z^3 + 2z^2 - 4z - 8 = (z-2) \cdot (z+2)^2$
   $\rightsquigarrow f_n = c_0 \cdot 2^n + (c_1 + c_2 n) \cdot (-2)^n = 2 \cdot 2^n + (1-2n) \cdot (-2)^n = 2^{n+1} + (1-2n) \cdot (-2)^n$,
7. $q^R(z) = z^4 - 4z^3 + 6z^2 - 4z + 1 = (z-1)^4$
   $\rightsquigarrow f_n = (c_0 + c_1 n + c_2 n^2 + c_3 n^3) \cdot 1^n = 1 - 5n + 5n^2 - n^3$.

Knifflige Quizfrage

Gegeben seien die durch die Rekursionsgleichungen

$$f_{n+1} - 3f_n = g_n \qquad (\forall n \geq 0) \qquad \text{und} \qquad g_{n+1} - 2g_n = 2f_n \qquad (\forall n \geq 0)$$

mit Anfangsbedingungen $f_0 = 1$ und $g_0 = 2$ beschrieben Folgen $(f_n)_{n\geq 0}$ und $(g_n)_{n\geq 0}$.

Welchen geschlossenen Ausdruck besitzt f_n?

Antwort

Einsetzen von $g_n = f_{n+1} - 3f_n$ in $g_{n+1} - 2g_n = 2f_n$ liefert:

$$(f_{n+2} - 3f_{n+1}) - 2(f_{n+1} - 3f_n) = 2f_n \qquad (\forall n \geq 0) \ .$$

Durch Umformen erhält man die Rekursionsgleichung

$$f_{n+2} - 5f_{n+1} + 4f_n = 0 \qquad (\forall n \geq 0)$$

mit Anfangsbedingungen $f_0 = 1$ und $f_1 = g_0 + 3f_0 = 2 + 3 \cdot 1 = 5$. Es folgt:

$$q^R(z) = z^2 - 5z + 4 = (z-1)(z-4)$$

$$\rightsquigarrow \ f_n = c_0 \cdot 1^n + c_1 \cdot 4^n = -\tfrac{1}{3} \cdot 1^n + \tfrac{4}{3} \cdot 4^n = \tfrac{1}{3}(4^{n+1} - 1)$$

Themenübersicht

Methode 2

Frage: Wie homogenisiert man eine lineare inhomogene Rekursionsgleichung?
Methode: Gegeben sei die Rekursionsgleichung:

$$f_{n+d} + q_1 f_{n+d-1} + q_2 f_{n+d-2} + \ldots + q_d f_n = s_n \qquad (\forall n \geq 0) \tag{2}$$

mit Anfangsbedingungen $f_0, f_1, \ldots, f_{d-1}$.

1. s_n als lineare homogene Rekursionsgleichung mit Grad e darstellen:

   $$s_{n+e} + r_1 s_{n+e-1} + r_2 s_{n+e-2} + \ldots + r_e s_n = 0 \qquad (\forall n \geq 0) \tag{3}$$

   (Methode 1 rückwärts!)

2. Die Gleichung (1) für $s_n, s_{n+1}, \ldots, s_{n+e}$ in (2) einsetzen und eine lineare homogene Rekursionsgleichung mit Grad $d + e$ für f bekommen:

   $$f_{n+d+e} + t_1 f_{n+d+e-1} + t_2 f_{n+d+e-2} + \ldots + t_{d+e} f_n = 0 \qquad (\forall n \geq 0)$$

3. Die fehlenden e Anfangsbedingungen $f_d, f_{d+1}, \ldots, f_{d+e-1}$ mit Gleichung (1) berechnen.

Beispiel

Aufgabe: Homogenisiere die Rekursionsgleichung

$$f_{n+1} + f_n = n \cdot 3^n \qquad (\forall n \geq 0) \tag{1}$$

mit Anfangsbedingung $f_0 = 1$.

Lösung:

1. Das Störglied $s_n = n \cdot 3^n$ hat die Form $s_n = p_1(n) \cdot 3^n$ mit $\text{grad}(p_1) = 1$. Daraus folgt: $\alpha_1 = 3, d_1 = \text{grad}(p_1) + 1 = 2$. Das charakteristische Polynom von s_n lautet also:

$$q^R(z) = (z-3)^2 = z^2 - 6z + 9$$

und somit ist die gesuchte Rekursionsgleichung:

$$s_{n+2} - 6s_{n+1} + 9s_n = 0 \qquad (\forall n \geq 0) \tag{2}$$

2. Durch Einsetzen von $s_n = f_{n+1} + f_n$ aus (1) in (2) bekommt man:

$$\underbrace{(f_{n+3} + f_{n+2})}_{s_{n+2}} - 6\underbrace{(f_{n+2} + f_{n+1})}_{s_{n+1}} + 9\underbrace{(f_{n+1} + f_n)}_{s_n} = 0 \qquad (\forall n \geq 0)$$

und durch Umformen:

$$f_{n+3} - 5f_{n+2} + 3f_{n+1} + 9f_n = 0 \qquad (\forall n \geq 0)$$

3. Einsetzen von $n = 0$ und $n = 1$ in (1) liefert $f_1 = -1$ und $f_2 = 4$.

Quizfragen

Wie kann man folgende inhomogene Rekursionsgleichungen homogenisieren?

1. $f_0 = 0$ und $f_{n+1} + 2f_n = 2^n$ für alle $n \geq 0$,
2. $f_0 = 1$ und $f_{n+1} - 3f_n = 3^n$ für alle $n \geq 0$,
3. $f_0 = 2$ und $f_{n+1} + f_n = 5^n$ für alle $n \geq 0$,
4. $f_0 = 1$ und $f_{n+1} - 4f_n = 5$ für alle $n \geq 0$,
5. $f_0 = 1$ und $f_{n+1} + f_n = n \cdot 3^n$ für alle $n \geq 0$,
6. $f_0 = 1$, $f_1 = 2$ und $f_{n+2} - 2f_{n+1} + f_n = 3^n + (-2)^n$ für alle $n \geq 0$,
7. $f_0 = 1$ und $f_{n+1} + f_n = n \cdot 3^n + 2^n$ für alle $n \geq 0$.

Benutze die Methode aus Folie 1328.

Antworten (kompakt)

1. $f_0 = 0$, $f_1 = 1$ und $f_{n+2} - 4f_n = 0$ für alle $n \geq 0$,
2. $f_0 = 1$, $f_1 = 4$ und $f_{n+2} - 6f_{n+1} + 9f_n = 0$ für alle $n \geq 0$,
3. $f_0 = 2$, $f_1 = -1$ und $f_{n+2} - 4f_{n+1} - 5f_n = 0$ für alle $n \geq 0$,
4. $f_0 = 1$, $f_1 = 9$ und $f_{n+2} - 5f_{n+1} + 4f_n = 0$ für alle $n \geq 0$,
5. $f_0 = 1$, $f_1 = -1$, $f_2 = 4$ und $f_{n+3} - 5f_{n+2} + 3f_{n+1} + 9f_n = 0$ für alle $n \geq 0$,
6. $f_0 = 1$, $f_1 = 2$, $f_2 = 5$, $f_3 = 9$ und $f_{n+4} - 3f_{n+3} - 3f_{n+2} + 11f_{n+1} - 6f_n = 0$ für alle $n \geq 0$,
7. $f_0 = 1$, $f_1 = 0$, $f_2 = 5$, $f_3 = 17$ und $f_{n+4} - 7f_{n+3} + 13f_{n+2} + 3f_{n+1} - 18f_n = 0$ für alle $n \geq 0$.

Themenübersicht

Partialbruchzerlegung

Das Ziel der Partialbruchzerlegung ist es Polynome $a_1(x), \ldots, a_n(x)$ zu finden, so dass für gegebene Polynome $p(x)$ und $q(x)$ mit $\text{grad}(p) < \text{grad}(q)$ gilt:

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{a_1(x)}{(x-\alpha_1)^{d_1}} + \ldots + \frac{a_n(x)}{(x-\alpha_n)^{d_n}}$$

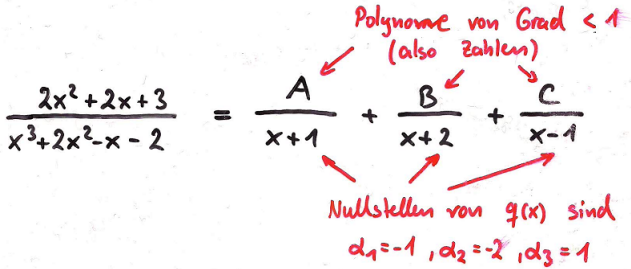
Dabei sind $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ Nullstellen von $q(x)$, $d_1, \ldots, d_n$ die jeweiligen Vielfachheiten und es gilt

$$\text{grad}\left(a_i(x)\right) < \text{grad}\left((x-\alpha_i)^{d_i}\right)$$

für alle $i = 1, \ldots, n$.

Beispiel

$p(x) = 2x^2 + 2x + 3$ und $q(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$.



Es folgt:

$$\frac{2x^2 + 2x + 3}{x^3 + 2x^2 - x - 2} = \frac{-\frac{3}{2}}{x+1} + \frac{\frac{7}{3}}{x+2} + \frac{\frac{7}{6}}{x-1}$$

Schön. Und wie kommt man drauf?

Durch Koeffizientenvergleich:

$$\frac{2x^2+2x+3}{x^3+2x^2-x-2} = \frac{A(x+2)(x-1) + B(x+1)(x-1) + C(x+1)(x+2)}{(x+1)(x+2)(x-1)}$$

$$\Leftrightarrow\ 2x^2+2x+3 = A(x^2+x-2) + B(x^2-1) + C(x^2+3x+2)$$

$$\Leftrightarrow\ 2x^2+2x+3 = (A+B+C)x^2 + (A+3C)x + (-2A-B+2C)$$

$$\rightsquigarrow \quad \left.\begin{array}{rrrl} A & +B & +C & = 2 \\ A & & +3C & = 2 \\ -2A & -B & +2C & = 3 \end{array}\right\}$$

Gauß-Elimination liefert:

$A = -\frac{3}{2}$, $B = \frac{7}{3}$, $C = \frac{7}{6}$

Trick: Nullstellen einsetzen

$$\frac{2x^2+2x+3}{x^3+2x^2-x-2} = \frac{A(x+2)(x-1) + B(x+1)(x-1) + C(x+1)(x+2)}{(x+1)(x+2)(x-1)}$$

$x = -1$

$$2(-1)^2 + 2(-1) + 3 = A(-1+2)(-1-1) + \underbrace{B(-1+1)(-1-1)}_{=0} + \underbrace{C(-1+1)(-1+2)}_{=0}$$

$$\Leftrightarrow 3 = A(-2)$$

$$\Leftrightarrow A = -\frac{3}{2}$$

$x = -2$

$$2(-2)^2 + 2(-2) + 3 = \underbrace{A(-2+2)(-2-1)}_{=0} + B(-2+1)(-2-1) + \underbrace{C(-2+1)(-2+2)}_{=0}$$

$$\Leftrightarrow \quad 7 = B \cdot 3$$

$$\Leftrightarrow \quad B = \frac{7}{3}$$

$x = 1$

$$2 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 + 3 = \underbrace{A(1+2)(1-1)}_{=0} + \underbrace{B(1+1)(1-1)}_{=0} + C(1+1)(1+2)$$

$$\Leftrightarrow \quad 7 = C \cdot 6$$

$$\Leftrightarrow \quad C = \frac{7}{6}$$

Info

Der Trick funktioniert nur für die Polynome $a_1(x), \ldots, a_n(x)$ bei denen das Polynom im entsprechenden Nenner Grad 1 hat.

Beispiel

Gegeben seien die Polynome $p(x) = 3x^2 - 9x + 7$ und $q(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 2$. Faktorisierung von $q(x)$ liefert $q(x) = (x-1)^2(x-2)$, d.h.:

$$\frac{3x^2 - 9x + 7}{x^3 - 4x^2 + 5x - 2} = \frac{a(x)}{(x-1)^2} + \frac{b(x)}{x-2}$$

Ansatz:

$$a(x) = Ax + B \qquad \text{, da grad } \left((x-1)^2\right) = 2$$
$$b(x) = C \qquad \text{, da grad } (x-2) = 1$$

Man könnte mit Koeffizientenvergleich ein lineares Gleichungssystem mit 3 Gleichungen und 3 Variablen lösen oder zuerst C durch einsetzen der Nullstelle $x_0 = 2$ bestimmen und dann mit Koeffizientenvergleich ein lineares Gleichungssystem mit nur 2 Gleichungen und 2 Variablen lösen.

Quizfragen

1. Für welche Polynome $a(x)$ und $b(x)$ gilt $\frac{x+5}{x^2-1} = \frac{a(x)}{x-1} + \frac{b(x)}{x+1}$?
2. Für welche Polynome $a(x)$ und $b(x)$ gilt $\frac{x+5}{x^2+x-2} = \frac{a(x)}{x-1} + \frac{b(x)}{x+2}$?
3. Für welche Polynome $a(x)$ und $b(x)$ gilt $\frac{7x+11}{x^2+x-6} = \frac{a(x)}{x-2} + \frac{b(x)}{x+3}$?
4. Für welche Polynome $a(x)$ und $b(x)$ gilt $\frac{3x-5}{x^2-3x+2} = \frac{a(x)}{x-1} + \frac{b(x)}{x-2}$?
5. Für welche Polynome $a(x)$ und $b(x)$ gilt $\frac{8x+12}{x^2+3x+2} = \frac{a(x)}{x+1} + \frac{b(x)}{x+2}$?
6. Für welche Polynome $a(x)$ und $b(x)$ gilt $\frac{x^2+2x-1}{x^4+4x^2+3} = \frac{a(x)}{x^2+1} + \frac{b(x)}{x^2+3}$?
7. Für welche Polynome $a(x)$ und $b(x)$ gilt $\frac{3x^3-2x^2+5x-1}{x^4+3x^2+2} = \frac{a(x)}{x^2+1} + \frac{b(x)}{x^2+2}$?
8. Für welche Polynome $a(x)$ und $b(x)$ gilt $\frac{x^3+x^2+3x+5}{x^4+5x^2+6} = \frac{a(x)}{x^2+3} + \frac{b(x)}{x^2+2}$?
9. Für welche Polynome $a(x)$, $b(x)$ und $c(x)$ gilt $\frac{x+11}{x^3+4x^2+x-6} = \frac{a(x)}{x-1} + \frac{b(x)}{x+2} + \frac{c(x)}{x+3}$?

Quizfragen

1. $a(x) = 3$ und $b(x) = -2$.
2. $a(x) = 2$ und $b(x) = -1$.
3. $a(x) = 5$ und $b(x) = 2$.
4. $a(x) = 2$ und $b(x) = 1$.
5. $a(x) = 4$ und $b(x) = 4$.
6. $a(x) = -x + 1$ und $b(x) = x - 2$.
7. $a(x) = 2x + 1$ und $b(x) = x - 3$.
8. $a(x) = -2$ und $b(x) = x + 3$.
9. $a(x) = 1$, $b(x) = -3$ und $c(x) = 2$.

Erzeugende Funktionen *

Zu einer Folge $(f_n)_{n\geq 0} = (f_0, f_1, f_2, \ldots)$ ist die erzeugende Funktion $F(z)$ definiert als:

$$F(z) := \sum_{n=0}^{\infty} f_n \cdot z^n.$$

Info

Man benutzt für die erzeugende Funktion denselben Buchstaben wie für die Folge, aber in Großschrift, z.B.:

$$A(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot z^n \ , \qquad B(z) := \sum_{n=0}^{\infty} b_n \cdot z^n \ , \qquad C(z) := \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot z^n \ , \qquad \ldots$$

*damals Definition 219 im Skript vom Wintersemester 2012/13 (Prof. Mayr)

Nochmal schön. Aber wozu erzeugende Funktionen?

Kommt gleich!

Erzeugende Funktionen für lineare homogene Rekursionsgleichungen

Zu einer gegebenen linearen homogenen Rekursionsgleichung

$$f_{n+d} + q_1 f_{n+d-1} + q_2 f_{n+d-2} + \ldots + q_d f_n = 0$$

mit Anfangsbedingungen $f_0, f_1, \ldots, f_{d-1}$ ist die erzeugende Funktion:

$$F(z) = \frac{e_0 + e_1 z + e_2 z^2 + \ldots + e_{d-1} z^{d-1}}{1 + q_1 z + q_2 z^2 + q_3 z^3 + \ldots + q_d z^d}$$

mit

$$e_i = f_i + q_1 f_{i-1} + q_2 f_{i-2} + \ldots + q_i f_0$$

für alle $i = 0, \ldots, d-1$.

Beispiel

Zur Rekursionsgleichung

$$f_{n+4} + 5f_{n+3} - 3f_{n+2} + 2f_{n+1} - f_n = 0$$

mit $f_0 = 1, f_1 = 3, f_2 = 5, f_3 = 7$ ist die erzeugende Funktion:

$$\begin{aligned} F(z) &= \frac{e_0 + e_1 z + e_2 z^2 + e_3 z^3}{1 + q_1 z + q_2 z^2 + q_3 z^3 + q_4 z^4} \\ &= \frac{f_0 + (f_1 + q_1 f_0)z + (f_2 + q_1 f_1 + q_2 f_0)z^2 + (f_3 + q_1 f_2 + q_2 f_1 + q_3 f_0)z^3}{1 + q_1 z + q_2 z^2 + q_3 z^3 + q_4 z^4} \\ &= \frac{1 + (3 + 5 \cdot 1)z + (5 + 5 \cdot 3 + (-3) \cdot 1)z^2 + (7 + 5 \cdot 5 + (-3) \cdot 3 + 2 \cdot 1)z^3}{1 + 5z + (-3)z^2 + 2z^3 + (-1)z^4} \\ &= \frac{1 + 8z + 17z^2 + 25z^3}{1 + 5z - 3z^2 + 2z^3 - z^4} \end{aligned}$$

Info

Diese Formel erlaubt uns eine äquivalente Darstellung für die erzeugende Funktion $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \cdot z^n$ zu finden. Bevor wir die allgemeine Methode kennenlernen, kommt als nächstes ein kleines Beispiel, damit ihr euch davon überzeugen könnt, dass beide Darstellungen äquivalent sind.

Beispiel

Betrachten wir die homogene Rekursionsgleichung

$$f_{n+1} - f_n = 0 \qquad (\forall n \geq 0)$$

mit Anfangsbedingung $f_0 = 1$. Diese Rekursionsgleichung hat Lösung $f_n = 1$ und somit die erzeugende Funktion

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} 1 \cdot z^n = \sum_{n=0}^{\infty} z^n.$$

Die äquivalente Darstellung wäre:

$$F(z) = \frac{e_0}{1 + q_1 z} = \frac{1}{1 - z}.$$

Tatsächlich gilt $\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$, denn:

$$(1 - z) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} z^n - \sum_{n=0}^{\infty} z^{n+1} = (1 + z + z^2 + z^3 + \ldots) - (z + z^2 + z^3 + \ldots) = 1.$$

Die ultimative Rechenregel für erzeugende Funktionen *

Für beliebige $d \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{C}$ und $i \in \mathbb{N}_0$ mit $0 \leq i < d$ gilt:

$$\frac{z^i}{(1-\alpha z)^d} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{d+n-i-1}{d-1} \alpha^{n-i} z^n.$$

Mit dieser Regel kann man so ziemlich alle für uns relevanten erzeugenden Funktionen von Summen in Brüche und von Brüchen in Summen umwandeln.

*Satz 222 im Skript vom Wintersemester 2012/13 (Prof. Mayr)

Beispiel

$$\begin{aligned}
\frac{3}{1-3z} + \frac{2z+5}{(1-2z)^2} &= 3 \cdot \frac{1}{1-3z} + 2 \cdot \frac{z}{(1-2z)^2} + 5 \cdot \frac{1}{(1-2z)^2} \\
&= 3 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} 3^n z^n + 2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot 2^{n-1} z^n + 5 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (n-1) \cdot 2^n z^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left(3 \cdot 3^n + 2 \cdot n \cdot 2^{n-1} + 5 \cdot (n-1) \cdot 2^n\right) z^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left(3^{n+1} + (6n-5) \cdot 2^n\right) z^n
\end{aligned}$$

Methode 3

Frage: Wie löst man lineare homogene Rekursionsgleichungen mit erzeugenden Funktionen?
Methode: Gegeben sei die Rekursionsgleichung

$$f_{n+d} + q_1 f_{n+d-1} + q_2 f_{n+d-2} + \ldots + q_d f_n = 0 \qquad (\forall n \geq 0)$$

mit Anfangsbedingungen $f_0, f_1, \ldots, f_{d-1}$.

1. Erzeugende Funktion $F(z)$ aufstellen:

$$F(z) = \frac{e_0 + e_1 z + e_2 z^2 + \ldots + e_{d-1} z^{d-1}}{1 + q_1 z + q_2 z^2 + q_3 z^3 + \ldots + q_d z^d}$$

   mit $e_i = f_i + q_1 f_{i-1} + q_2 f_{i-2} + \ldots + q_i f_0$ für alle $i = 0, \ldots, d-1$.

2. Seien $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ die Nullstellen des charakteristischen Polynoms und $d_1, \ldots, d_k$ ihre Vielfachheiten. Mit Partialbruchzerlegung (über $\mathbb{C}$) Polynome $g_1, \ldots, g_k$ mit $\text{grad}(g_i) < d_i$ finden, so dass gilt:

$$F(z) = \frac{g_1(z)}{(1-\alpha_1 z)^{d_1}} + \frac{g_2(z)}{(1-\alpha_2 z)^{d_2}} + \ldots + \frac{g_k(z)}{(1-\alpha_k z)^{d_k}}$$

3. Die einzelnen Brüchen, analog zum Beispiel auf Folie 1351, in Summen umwandeln und f_n rauslesen:

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (\underbrace{p_1(n)\alpha_1^n + p_2(n)\alpha_2^n + \ldots + p_k(n)\alpha_k^n}_{f_n}) z^n.$$

Hierbei sind $p_1(n), \ldots, p_k(n)$ wieder Polynome mit Unbekannter n.

Beispiel

Aufgabe: Löse die lineare homogene Rekursionsgleichung

$$f_{n+2} - 5f_{n+1} + 6f_n = 0 \qquad (\forall n \geq 0)$$

mit Anfangsbedingungen $f_0 = 1$ und $f_1 = 4$.

Lösung:

1. Die erzeugende Funktion ist:
$$F(z) = \frac{1 - z}{1 - 5z + 6z^2}$$
2. Partialbruchzerlegung liefert:
$$F(z) = \frac{-1}{1 - 2z} + \frac{2}{1 - 3z}$$
3. Mit Satz 222 bekommt man:
$$F(z) = (-1) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} 2^n z^n + 2 \cdot 2 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} 3^n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-2^n + 2 \cdot 3^n) z^n$$

   Daraus folgt:
$$f_n = -2^n + 2 \cdot 3^n$$

Quizfragen

Welche Lösung besitzen folgende homogene Rekursionsgleichungen?

1. $f_0 = 3$ und $f_{n+1} - f_n = 0$ für alle $n \geq 0$,
2. $f_0 = 1$ und $f_{n+1} - 2f_n = 0$ für alle $n \geq 0$,
3. $f_0 = -2$ und $f_{n+1} + 3f_n = 0$ für alle $n \geq 0$,
4. $f_0 = 0$, $f_1 = 1$ und $f_{n+2} - 3f_{n+1} + 2f_n = 0$ für alle $n \geq 0$,
5. $f_0 = 1$, $f_1 = 4$ und $f_{n+2} - 5f_{n+1} + 6f_n = 0$ für alle $n \geq 0$.

Benutze die Methode aus Folie 1352.

Antworten (kompakt)

1. $F(z) = \frac{3}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} 3z^n$
   $\rightsquigarrow f_n = 3.$
2. $F(z) = \frac{1}{1-2z} = \sum_{n=0}^{\infty} (2z)^n = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n z^n$
   $\rightsquigarrow f_n = 2^n.$
3. $F(z) = \frac{-2}{1+3z} = \sum_{n=0}^{\infty} -2 \cdot (-3)^n z^n$
   $\rightsquigarrow f_n = -2 \cdot (-3)^n.$
4. $F(z) = \frac{z}{1-3z+2z^2} = \frac{-1}{1-z} + \frac{1}{1-2z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1 + 2^n) z^n$
   $\rightsquigarrow f_n = -1 + 2^n.$
5. $F(z) = \frac{1-z}{1-5z+6z^2} = \frac{-1}{1-2z} + \frac{2}{1-3z} = \sum_{k=0}^{\infty} (-2^n + 2 \cdot 3^n) z^n$
   $\rightsquigarrow f_n = -2^n + 2 \cdot 3^n.$

Methode 4

Frage: Wie löst man lineare inhomogene Rekursionsgleichungen mit erzeugenden Funktionen?
Methode: Gegeben sei die Rekursionsgleichung

$$f_{n+d} + q_1 f_{n+d-1} + q_2 f_{n+d-2} + \ldots + q_d f_n = s_n \qquad (\forall n \geq 0)$$

mit Anfangsbedingungen $f_0, f_1, \ldots, f_{d-1}$

1. lineare homogene Rekursionsgleichung definieren mit:

   $$h_{n+d} + q_1 h_{n+d-1} + q_2 h_{n+d-2} + \ldots + q_d h_n = 0 \qquad (\forall n \geq 0)$$

   und Anfangsbedingungen $h_0 = f_0, h_1 = f_1, \ldots, h_{d-1} = f_{d-1}$ und h_n mit Methode 1 oder Methode 3 lösen.

2. Folge p_n mit folgender erzeugenden Funktion $P(z)$ definieren:

   $$P(z) = \frac{z^d \cdot \sum_{n=0}^{\infty} s_n z^n}{1 + q_1 z + q_2 z^2 + \ldots + q_d z^d}$$

3. Die Summe $\sum_{n=0}^{\infty} s_n z^n$ mit Satz 222 in ein Bruch umwandeln und analog zur Methode 3 p_n mit $P(z)$ lösen.

4. $f_n = h_n + p_n$ setzen.

Beispiel

Aufgabe: Löse die lineare inhomogene Rekursionsgleichung

$$f_{n+1} + f_n = 3^n \qquad (\forall n \geq 0)$$

mit Anfangsbedingung $f_0 = 1$.

Lösung:

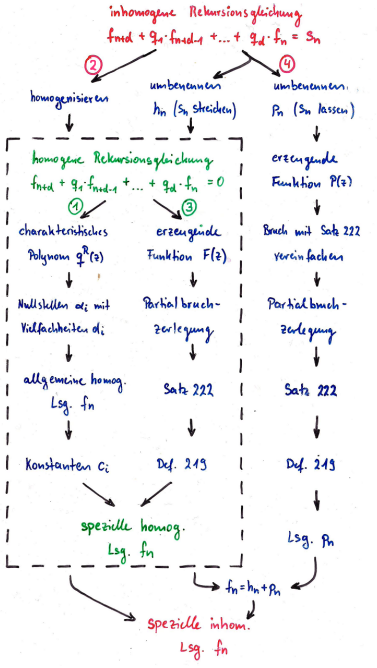
1. Man definiert
$$h_{n+1} + h_n = 0 \qquad (\forall n \geq 0)$$
mit Anfangsbedingung $h_0 = f_0 = 1$ und bekommt als Lösung: $h_n = (-1)^n$.
2. Die Erzeugende Funktion $P(z)$ von p ist:
$$P(z) = \frac{z \cdot \sum_{n=0}^{\infty} 3^n z^n}{1+z}$$
3. Mit Satz 222, Partialbruchzerlegung und nochmal Satz 222 bekommt man:
$$P(z) \overset{S.222}{=} \frac{z \cdot \frac{1}{1-3z}}{1+z} = \frac{z}{(1-3z)(1+z)} \overset{\text{PBZ}}{=} \frac{\frac{1}{4}}{1-3z} + \frac{-\frac{1}{4}}{1+z}$$
$$\overset{S.222}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4} \cdot 3^n z^n + \sum_{n=0}^{\infty} -\frac{1}{4} \cdot (-1)^n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4}(3^n - (-1)^n) \right) z^n$$
4. Daraus folgt: $f_n = h_n + p_n = (-1)^n + \frac{1}{4}(3^n - (-1)^n) = \frac{1}{4}\left(3(-1)^n + 3^n\right)$.

Überblick

Wir haben insgesamt 4 Methoden kennengelernt:

1. Mit Methode 1 lassen sich lineare homogene Rekursionsgleichungen lösen.
2. Mit Methode 2 kann man lineare inhomogene Rekursionsgleichungen in lineare homogene Rekursionsgleichungen überbringen.
3. Mit Methode 3 lassen sich auch lineare homogene Rekursionsgleichungen lösen. Sie ist aber nicht ganz so einfach wie die erste!
4. Mit Methode 4 lassen sich lineare inhomogene Rekursionsgleichungen lösen. Sie ist sehr schwierig, sogar schwieriger als die ersten zwei Methoden zusammen!

Graphisch:


inhomogene Rekursionsgleichung
$f_{n+d} + q_1 \cdot f_{n+d-1} + \ldots + q_d \cdot f_n = s_n$
2
homogenisieren
umbenennen
h_n (s_n streichen)
4
umbenennen
p_n (s_n lassen)
homogene Rekursionsgleichung
$f_{n+d} + q_1 \cdot f_{n+d-1} + \ldots + q_d \cdot f_n = 0$
1
3
charakteristisches Polynom $q^R(z)$
erzeugende Funktion $F(z)$
erzeugende Funktion $P(z)$
Bruch mit Satz 222 vereinfachen
Nullstellen a_i mit Vielfachheiten d_i
Partialbruchzerlegung
Partialbruchzerlegung
allgemeine homog. Lsg. f_n
Satz 222
Satz 222
Konstanten c_i
Def. 219
Def. 219
spezielle homog. Lsg. f_n
Lsg. p_n
$f_n = h_n + p_n$
spezielle inhom. Lsg. f_n

Knifflige Quizfrage

Gegeben sei folgende nichtlineare Rekursionsgleichung:

$$\frac{f_{n+2} \cdot f_{n+1}}{(f_n)^2} = 1 \qquad (\forall n \geq 0)$$

mit Anfangsbedingungen $f_0 = 8$ und $f_1 = 1$.

Welchen geschlossenen Ausdruck besitzt f_n?

Hinweis: Betrachte zunächste die Folge $(h_n)_{n \geq 0}$ mit $h_n := \log_2(f_n)$.

Antwort

Wir rechnen:

$$\begin{aligned}
\frac{f_{n+2} \cdot f_{n+1}}{(f_n)^2} = 1 \qquad &\iff \qquad \log_2\left(\frac{f_{n+2} \cdot f_{n+1}}{(f_n)^2}\right) = \log_2(1) \\
&\iff \qquad \log_2(f_{n+2} \cdot f_{n+1}) - \log_2((f_n)^2) = 0 \\
&\iff \qquad \log_2(f_{n+2}) + \log_2(f_{n+1}) - 2\log_2(f_n) = 0
\end{aligned}$$

Daraus folgt die Rekursionsgleichung

$$h_{n+2} + h_{n+1} - 2h_n = 0 \qquad (\forall n \geq 0)$$

mit Anfangsbedingungen $h_0 = \log_2(8) = 3$ und $h_1 = \log_2(1) = 0$.
Für h_n gilt:

$$q^R(z) = z^2 + z - 2 = (z-1)(z+2)$$

$$\rightsquigarrow \; h_n = c_0 \cdot 1^n + c_1 \cdot (-2)^n = 2 \cdot 1^n + 1 \cdot (-2)^n = 2 + (-2)^n$$

Daraus folgt $f_n = 2^{h_n} = 2^{2+(-2)^n}$.

Themenübersicht

Themenübersicht

Rezept

Frage: Gegeben sind ein Graph $G = (V, E)$ mit Kantengewichten $w : E \to \mathbb{R}_0^+$ und einen Startknoten $s \in V$. Wie findet man den kürzesten Weg von s zu allen anderen Knoten?

Methode Algorithmus von Dijkstra:

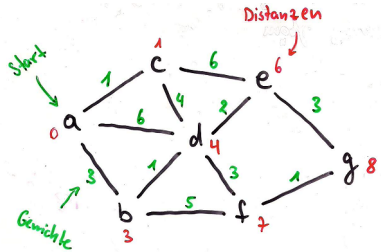
1. Setze $\text{dist}[s] := 0$ und $\text{dist}[v] = \infty$ für alle restlichen Knoten v;
2. Bis alle Knoten markiert sind wiederhole:
3. Bestimme unmarkierten Knoten u mit kleinstem Wert $d(u)$ und markiere es;
4. Für jeden unmarkierten Nachbarn v von u mach:
5. falls $\text{dist}[u] + w(\{u, v\}) < \text{dist}[v]$
6. Setze $\text{dist}[v] := \text{dist}[u] + w(\{u, v\})$ und $\text{pred}[v] = u$;

Am Ende geben $\text{dist}[v]$ die kürzeste Distanz zu einem Knoten v und $\text{pred}[v]$ den Vorgänger von v im kürzesten Weg an.

Info

Der Algorithmus von Dijkstra hat eine Laufzeit von $\mathcal{O}(|V|^2)$.

Beispiel



Protokoll:

	b	c	d	e	f	g
a:	$(3, a)$	$\underline{(1, a)}$	$(6, a)$	–	–	–
c:	$\underline{(3, a)}$		$(5, c)$	$(7, c)$	–	–
b:			$\underline{(4, b)}$	$(7, c)$	$(8, b)$	–
d:				$\underline{(6, d)}$	$(7, d)$	–
e:					$\underline{(7, d)}$	$(9, e)$
f:						$\underline{(8, f)}$

Die kürzeste Distanz von a nach z.B. g ist 8 und der Weg ist $a \to b \to d \to f \to g$.

Themenübersicht

Rezept

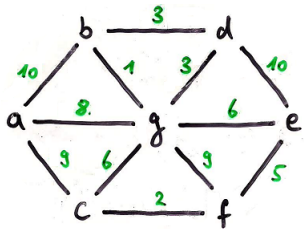
Frage: Gegeben sind ein Graph $G = (V, E)$ mit Kantengewichten $w : E \to \mathbb{R}$. Wie findet man einen Spannbaum mit minimaler Kantengewichtssumme?
Methode Algorithmus von Kruskal:

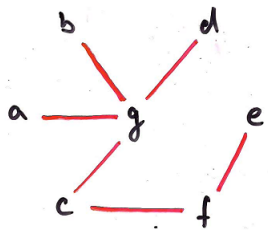
1. Sortiere alle Kanten nach Gewicht;
2. Gehe die Kanten in aufsteigender Reihenfolge durch und für jede Kante mach:
3. falls sie keinen Kreis bildet:
4. füge sie in den Spannbaum hinzu;

Infos

- Der Algorithmus von Kruskal hat eine Laufzeit von $\mathcal{O}(|E| \cdot log|V|)$
- Geht man die Kanten in absteigender Reihenfolge durch, so bekommt man einen Spannbaum mit maximaler Kantengewichtssumme.

Beispiel





Protokoll:

Gewicht	Kante
1	$\{b, g\}$
2	$\{c, f\}$
3	$\{d, g\}$
5	$\{e, f\}$
6	$\{c, g\}$
8	$\{a, g\}$

Alle minimale Spannbäume haben die Kantensumme $1 + 2 + 3 + 5 + 6 + 8 = 25$.

Themenübersicht

Themenübersicht

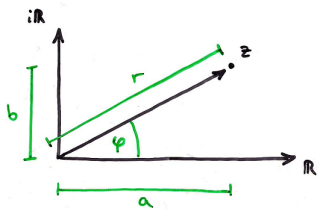
Komplexe Zahlen

Die Menge der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ ist eine Erweiterung der reellen Zahlen $\mathbb{R}$. Jede komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$ lässt sich auf zwei Arten darstellen.

1) Algebraische Form: $z = a + bi \quad (a, b \in \mathbb{R})$
2) Polarform: $z = re^{\varphi i} \quad (\varphi \in \mathbb{R}, r \geq 0)$

Infos

- Die imaginäre Einheit i besitzt die Eigenschaft $i^2 = -1$.
- $a = \mathrm{Re}(z)$ wird Realanteil, $b = \mathrm{Im}(z)$ Imaginäranteil, $r = |z|$ Länge und φ Winkel von z genannt. Es gilt $\mathbb{R} = \{z \in \mathbb{C} \,|\, \mathrm{Im}(z) = 0\}$.
- Der Winkel φ wird in Bogenmaß (Radiant) und nicht in Gradmaß (Grad) gemessen!
- Jede komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$ mit algebraischer Form $z = a + bi$ und Polarform $z = re^{\varphi i}$ kann durch einen Punkt (a, b) auf der Gauß'schen Zahlenebene dargestellt werden:



- Zusammen mit der Euler'schen Formel $e^{xi} = \cos x + i \sin x$ folgen die Gleichungen

$$a = r\cos\varphi, \quad b = r\sin\varphi, \quad r = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

1. Was ist die algebraische Form folgender komplexen Zahlen?

$$2e^{\pi i}, \quad e^{\frac{1}{4}\pi i}, \quad \sqrt{2}e^{\frac{3}{4}\pi i}, \quad 3e^{\frac{7}{6}\pi i}, \quad 2e^{-\frac{1}{3}\pi i}.$$

2. Was ist die Polarform folgender komplexen Zahlen?

$$1-\sqrt{3}i, \quad 2+2i, \quad -5, \quad 3i, \quad 2i-\frac{2}{\sqrt{3}}$$

3. Was ist die algebraische Form von $e^{\pi i+1}$?

Hinweis:

Benutze die Formeln aus Folie 1376 zusammen mit folgender Wertetabelle:

x	0	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π	$\frac{7}{6}\pi$	$\frac{5}{4}\pi$	$\frac{4}{3}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$	$\frac{5}{3}\pi$	$\frac{7}{4}\pi$	$\frac{11}{6}\pi$	2π
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{2}$	0
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

Antworten

1.

$$-2, \quad \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i, \quad -1 + i, \quad \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i, \quad 1 - \sqrt{3}i.$$

2.

$$2e^{\frac{5}{3}\pi i}, \quad 2\sqrt{2}e^{\frac{1}{4}\pi i}, \quad 5e^{\pi i}, \quad 3e^{\frac{1}{2}\pi i}, \quad \frac{4}{\sqrt{3}}e^{\frac{3}{2}\pi i}.$$

3.

$$e^{\pi i + 1} = e \cdot e^{\pi i} = e \cdot (-1) = -e.$$

Elementare Operationen in algebraischer Form

Seien $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ komplexe Zahlen mit $z_1 = a_1 + b_1 i$ und $z_2 = a_2 + b_2 i$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i \\ z_1 - z_2 &= (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i \\ z_1 \cdot z_2 &= (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i \end{aligned}$$

Info

Die Formel für $\frac{z_1}{z_2}$ dürft ihr gleich selber herleiten ;-)

Quizfrage

Gegeben seien zwei komplexe Zahlen $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ mit $z_1 = a_1 + b_1 i$, $z_2 = a_2 + b_2 i$ und $z_2 \neq 0$. Was ist die algebraische Form von

$$z_3 = \frac{z_1}{z_2}$$

in Abhängigkeit von a_1, a_2, b_1 und b_2?

Antwort

Sei $z_3 = a_3 + b_3 i$. Es muss gelten $z_1 = z_2 \cdot z_3$, d.h.:

$$a_1 + b_1 i = (a_2 + b_2 i) \cdot (a_3 + b_3 i) = \underbrace{(a_2 a_3 - b_2 b_3)}_{=a_1} + \underbrace{(a_2 b_3 + a_3 b_2)}_{=b_1}$$

Aus dem Gleichungssystem

$$\begin{aligned} a_2 a_3 - b_2 b_3 &= a_1 \\ a_2 b_3 + a_3 b_2 &= b_1 \end{aligned}$$

folgen die eindeutigen Werte $a_3 = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}$ und $b_3 = \frac{b_1 a_2 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}$. Das ergibt:

$$z_3 = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{b_1 a_2 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} i$$

Multiplikation in Polarform

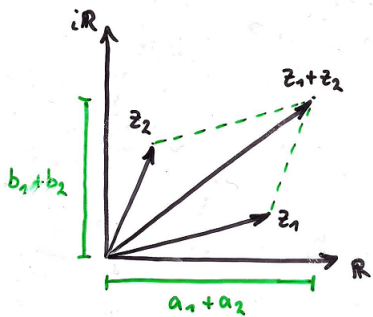
Seien $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ komplexe Zahlen mit $z_1 = r_1 \cdot e^{\varphi_1 i}$ und $z_2 = r_2 \cdot e^{\varphi_2 i}$. Dann gilt:

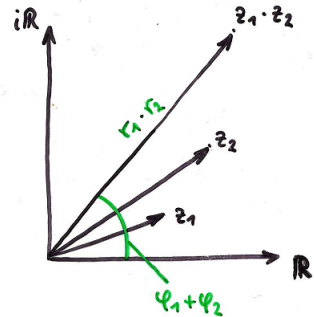
$$z_1 \cdot z_2 = (r_1 \cdot r_2) e^{(\varphi_1 + \varphi_2) i}$$

Info

Die Polarform macht nur beim Multiplizieren, Potenzieren, Dividieren oder Radizieren (Wurzelziehen) von komplexen Zahlen Sinn. Für Addition und Subtraktion sollte man die algebraische Form benutzen.

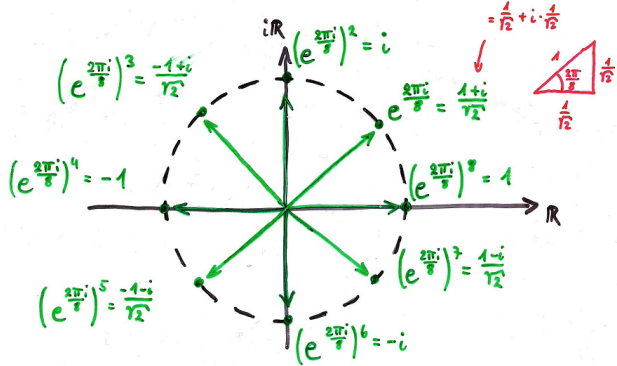
Graphische Bedeutung





Beispiel

Die komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$ mit $z = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i = e^{\frac{\pi}{4}i} = e^{\frac{2\pi}{8}i}$ hat Länge 1. Die Zahlen $z, z^2, z^3, z^4, \ldots$ sind alle auf dem sogenannten komplexen Einheitskreis:



Einheitswurzeln in $\mathbb{C}$

Sei $n \in \mathbb{N}$. Eine komplexe Zahl $\omega \in \mathbb{C}$ heißt *n*-te Einheitswurzel, falls für sie gilt:

$$\omega^n = 1.$$

Eine Einheitswurzel ω heißt primitiv, falls für alle $m \in [n-1]$ gilt:

$$\omega^m \neq 1.$$

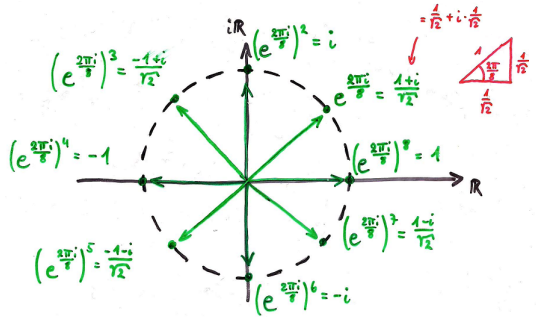
Infos

- 1 ist die einzige 1-te Einheitswurzel. Wegen $[0] = \emptyset$ ist sie auch primitiv.
- Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gibt es genau n n-te Einheitswurzeln:

$$1, e^{\frac{2\pi}{n}i}, e^{\frac{2\pi}{n}i\cdot 2}, e^{\frac{2\pi}{n}i\cdot 3}, \ldots, e^{\frac{2\pi}{n}i\cdot(n-1)}.$$

Quizfragen

Sei $z \in \mathbb{C}$ mit $z = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i = e^{\frac{\pi}{4}i} = e^{\frac{2\pi}{8}i}$ wie vorhin:



1. Welche der Zahlen $1, z, z^2, \ldots, z^7$ sind 8-te Einheitswurzeln?
2. Welche davon sind primitiv?

Antwort

1. Alle acht.
2. z, z^3, z^5 und z^7.

Themenübersicht

Fouriertransformation

Gegeben seien $\vec{a} = (a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$ mit Länge n und eine n-te primitive Einheitswurzel $\omega \in \mathbb{C}$. Die Fouriertransformation $\mathcal{F}_{n,\omega}(\vec{a})$ von $\vec{a}$ ist ebenfalls ein Vektor aus $\mathbb{C}^n$ und ist definiert als:

$$\mathcal{F}_{n,\omega}(\vec{a}) := \left(P_{\vec{a}}(1), P_{\vec{a}}(\omega), P_{\vec{a}}\left(\omega^2\right), \ldots, P_{\vec{a}}\left(\omega^{n-1}\right)\right).$$

Dabei ist $P_{\vec{a}}(x) := a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_{n-1} x^{n-1}$ das durch den Vektor $\vec{a}$ kodierte Polynom.

Infos

- Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist $e^{\frac{2\pi}{n}i}$ eine primitive n-te Einheitswurzel.
- Die Fouriertransformation ist nichts anderes als eine bijektive Funktion $\mathcal{F}_{n,\omega} : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ zwischen der Menge aller komplexen n-Tupel und sich selbst.
- Die Umkehrfunktion $\mathcal{F}_{n,\omega}^{-1}$ von $\mathcal{F}_{n,\omega}$ ist

$$\mathcal{F}_{n,\omega}^{-1}(\vec{a}) = \frac{1}{n} \cdot \mathcal{F}_{n,\frac{1}{\omega}}(\vec{a}).$$

  Hierbei hat $\frac{1}{\omega}$ dieselbe Polarform wie ω, aber mit negativem Winkel. Der Faktor $\frac{1}{n}$ wird auf jede Komponente des Tupels $\mathcal{F}_{n,\frac{1}{\omega}}(\vec{a})$ dazumultipliziert.

Beispiele

Weil $e^{\frac{2\pi}{n}i}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine primitive n-te Einheitswurzel ist, werden wir für die Berechnung von $\mathcal{F}_{n,\omega}(\vec{a})$ meistens $\omega = e^{\frac{2\pi}{n}i}$ wählen.

- Für $n = 1$, $\omega = e^{2\pi i} = 1$ und $\vec{a} = (1)$ gilt

$$P_{\vec{a}}(x) = 1$$

und

$$\mathcal{F}_{1,1}((1)) = (P_{\vec{a}}(1)) = (1).$$

- Für $n = 2$, $\omega = e^{\pi i} = -1$ und $\vec{a} = (1, 2)$ gilt

$$P_{\vec{a}}(x) = 1 + 2x$$

und

$$\mathcal{F}_{2,-1}((1,2)) = (P_{\vec{a}}(1), P_{\vec{a}}(-1)) = (3, -1).$$

- Für $n = 3$, $\omega = e^{\frac{2\pi}{3}i} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ und $\vec{a} = (1, 2, 3)$ gilt

$$P_{\vec{a}}(x) = 1 + 2x + 3x^2$$

und

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{3,-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i}((1,2,3)) &= \left(P_{\vec{a}}(1), P_{\vec{a}}\left(-\tfrac{1}{2} + \tfrac{\sqrt{3}}{2}i\right), P_{\vec{a}}\left(-\tfrac{1}{2} - \tfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)\right) \\ &= \left(6, -\tfrac{3}{2} - \tfrac{\sqrt{3}}{2}i, -\tfrac{3}{2} + \tfrac{\sqrt{3}}{2}i\right).\end{aligned}$$

- Für $n = 4$, $\omega = e^{\frac{2\pi}{4}i} = i$ und $\vec{a} = (1, 2, 3, 4)$ gilt

$$P_{\vec{a}}(x) = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3$$

und

$$\mathcal{F}_{4,i}((1,2,3,4)) = (P_{\vec{a}}(1), P_{\vec{a}}(i), P_{\vec{a}}(-1), P_{\vec{a}}(-i)) = (10, -2 - 2i, -2, -2 + 2i).$$

Quizfragen

Was sind die Ergebnisse folgender Fouriertransformationen?

1. $\mathcal{F}_{4,i}((3,2,0,2))$,
2. $\mathcal{F}_{4,i}((2i,3,-i,2))$,
3. $\mathcal{F}_{4,i}((4,1,-2,2))$,
4. $\mathcal{F}_{4,i}((2,1,2,1))$.

Benutze die Definition aus Folie 1389.

Antworten (ohne Rechnungen)

1. $\mathcal{F}_{4,i}((3,2,0,2)) = (7,3,-1,3)$,
2. $\mathcal{F}_{4,i}((2i,3,-i,2)) = (5+i,4i,-5+i,2i)$,
3. $\mathcal{F}_{4,i}((4,1,-2,2)) = (5,6-i,-1,6+i)$,
4. $\mathcal{F}_{4,i}((2,1,2,1)) = (6,0,2,0)$.

Themenübersicht

Schnelle Fouriertransformation

Seien $n \in \mathbb{N}$ gerade und ω eine primitive n-te Einheitswurzel. Sind

$$\mathcal{F}_{\frac{n}{2},\omega^2}\big((a_0, a_1, \ldots, a_{\frac{n}{2}-1})\big) = (c_0, c_1, \ldots, c_{\frac{n}{2}-1}) \text{ und}$$
$$\mathcal{F}_{\frac{n}{2},\omega^2}\big((b_0, b_1, \ldots, b_{\frac{n}{2}-1})\big) = (d_0, d_1, \ldots, d_{\frac{n}{2}-1}),$$

dann gilt:

$$\mathcal{F}_{n,\omega}\big((a_0, b_0, a_1, b_1, \ldots, a_{\frac{n}{2}-1}, b_{\frac{n}{2}-1})\big) =$$
$$(c_0 + d_0, c_1 + \omega d_1, \ldots, c_{\frac{n}{2}-1} + \omega^{\frac{n}{2}-1} d_{\frac{n}{2}-1}, c_0 - d_0, c_1 - \omega d_1, \ldots, c_{\frac{n}{2}-1} - \omega^{\frac{n}{2}-1} d_{\frac{n}{2}-1}).$$

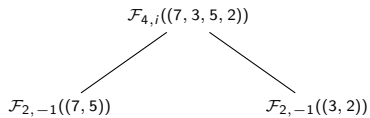
Beispiel

Seien $\vec{a} = (7, 3, 5, 2)$ und $\omega = i$.

$$\mathcal{F}_{4,i}((7, 3, 5, 2))$$

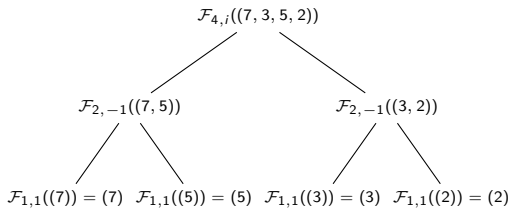
Beispiel

Seien $\vec{a} = (7, 3, 5, 2)$ und $\omega = i$.



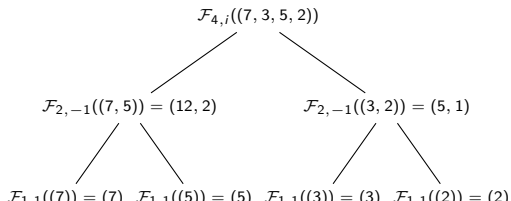
Beispiel

Seien $\vec{a} = (7, 3, 5, 2)$ und $\omega = i$.



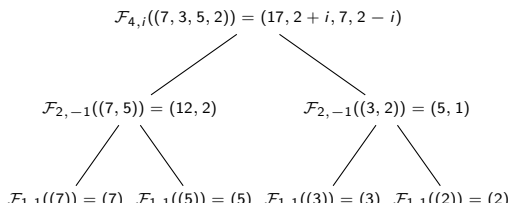
Beispiel

Seien $\vec{a} = (7, 3, 5, 2)$ und $\omega = i$.



Beispiel

Seien $\vec{a} = (7, 3, 5, 2)$ und $\omega = i$.

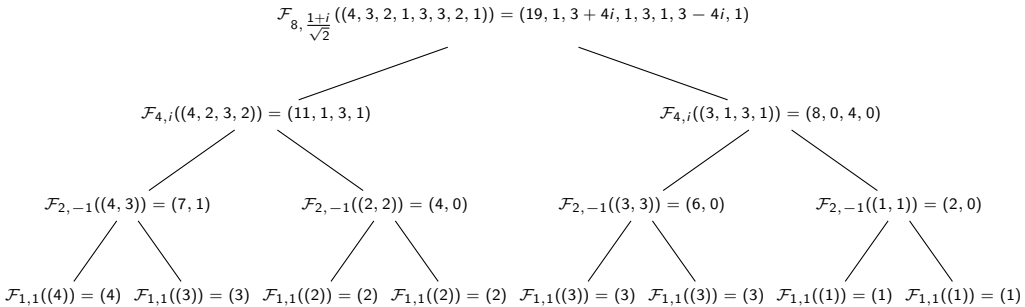


Daraus folgt:

$$\mathcal{F}_{4,i}((7,3,5,2)) = (17, 2+i, 7, 2-i).$$

Noch ein Beispiel

Seien $\vec{a} = (4, 3, 2, 1, 3, 3, 2, 1)$ und $\omega = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$.



Daraus folgt:

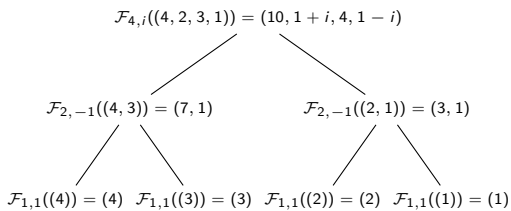
$$\mathcal{F}_{8,\frac{1+i}{\sqrt{2}}}((4,3,2,1,3,3,2,1)) = (19, 1, 3+4i, 1, 3, 1, 3-4i, 1).$$

Quizfrage

Was ist $\mathcal{F}_{4,i}((4,2,3,1))$?

Benutze die rekursive Berechnung aus Folie 1396.

Antwort


$\mathcal{F}_{4,i}((4,2,3,1)) = (10, 1+i, 4, 1-i)$
$\mathcal{F}_{2,-1}((4,3)) = (7,1)$
$\mathcal{F}_{2,-1}((2,1)) = (3,1)$
$\mathcal{F}_{1,1}((4)) = (4)$
$\mathcal{F}_{1,1}((3)) = (3)$
$\mathcal{F}_{1,1}((2)) = (2)$
$\mathcal{F}_{1,1}((1)) = (1)$

Noch eine Quizfrage

Sei $\omega = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$. Was ist $\mathcal{F}_{8,\omega}((2i, 2, 3, 1, -i, 2, 2, 1))$?

Benutze die rekursive Berechnung aus Folie 1396. Du darfst auch die Ergebnisse aus der Quizfrage auf Folie 1393 benutzen, um Zeit zu sparen.

Antwort

$$\mathcal{F}_{8,\frac{1+i}{\sqrt{2}}}((2i,2,3,1,-i,2,2,1)) = (11+i, 4i, -5+3i, 2i, -1+i, 4i, -5-i, 2i)$$

$$\mathcal{F}_{4,i}((2i,3,-i,2)) = (5+i, 4i, -5+i, 2i) \qquad \mathcal{F}_{4,i}((2,1,2,1)) = (6,0,2,0)$$

Mehr Quizfragen

Sei $\omega = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$. Was sind die Ergebnisse folgender Fouriertransformationen?

1. $\mathcal{F}_{8,\omega}((2,2,2,2,2,2,2,2))$,
2. $\mathcal{F}_{8,\omega}((16,0,0,0,0,0,0,0))$,
3. $\mathcal{F}_{8,\omega}((8,0,0,0,-16,0,0,0))$.

Benutze die rekursive Berechnung aus Folie 1396.

Antworten (ohne Rechnungen)

1. $\mathcal{F}_{8,\omega}((2,2,2,2,2,2,2,2)) = (16,0,0,0,0,0,0,0)$,
2. $\mathcal{F}_{8,\omega}((16,0,0,0,0,0,0,0)) = (8,0,0,0,-16,0,0,0)$,
3. $\mathcal{F}_{8,\omega}((8,0,0,0,-16,0,0,0)) = (8,2+2i,0,2-2i,0,2+2i,0,2-2i)$.

Primitive Einheitswurzeln

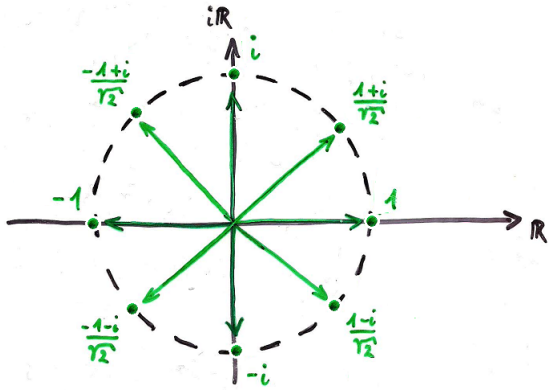
Wir haben für die Fouriertransformation bisher nur mit $n = 1$, $n = 2$, $n = 4$ und $n = 8$ gearbeitet. Mögliche primitive n-te Einheitswurzeln für diese Werte sind:

n	primitive n-te Einheitswurzeln	$e^{\frac{2\pi}{n}i}$
1	1	1
2	-1	-1
4	i, $-i$	i
8	$\frac{1+i}{\sqrt{2}}$, $\frac{-1+i}{\sqrt{2}}$, $\frac{-1-i}{\sqrt{2}}$, $\frac{1-i}{\sqrt{2}}$	$\frac{1+i}{\sqrt{2}}$

Wir haben in DS nur $\omega = e^{\frac{2\pi}{n}i}$ als primitive n-te Einheitswurzel benutzt und wahrscheinlich bleibt es auch so!

Tipp

Man kann mit Hilfe des komplexen Einheitskreises diese Werte leicht potenzieren. Nimmt man ω als Startpunkt und läuft n Schritte auf dem Einheitskreis gegen den Uhrzeiger (jeder Schritt ist so groß wie der Schritt von 1 zu ω), so landet man auf ω^n:



Für $\omega = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$ gilt beispielsweise:

$$\begin{array}{llll} \omega^0 = 1, & \omega^1 = \frac{1+i}{\sqrt{2}}, & \omega^2 = i, & \omega^3 = \frac{-1+i}{\sqrt{2}}, \\ \omega^4 = -1, & \omega^5 = \frac{-1-i}{\sqrt{2}}, & \omega^6 = -i, & \omega^7 = \frac{1-i}{\sqrt{2}}. \end{array}$$

Entsprechend gilt für $\omega = i$:

$$\omega^0 = 1, \quad \omega^1 = i, \quad \omega^2 = -1, \quad \omega^3 = -i.$$