Induktion

à la Übungsleitung

Carlos Camino

www.carlos-camino.de/ds

Wintersemester 2015/16

„Geben Sie explizit Induktionsbasis und Induktionsschritt an. Unterscheiden Sie weiterhin im Induktionsschritt explizit nach Induktionsannahme, der im Induktionsschritt zu zeigenden Behauptung und deren Beweis.“

- Aufgabe 5 in der letzten Klausur

Info

Die Induktionsbeweise im DS Trainer bestehen immer aus den drei Teilen

- Induktionsanfang (I.A.),
- Induktionsvoraussetzung (I.V.) und
- Induktionsschluss (I.S.).

Weil es in Aufgabe 5 der letzten Klausur so gefordert wurde, gibt es hier das passende Schema dazu.

Neues Schema

Sei $P(n)$ eine Aussage, die für alle $n \in \mathbb{N}_0$ mit $n \geq n_0$ gezeigt werden muss.

Das ausführlichere Beweisschema lautet:

- Induktionsbasis: zeige $P(n_0)$.
- Induktionsschritt: „Sei $n \in \mathbb{N}_0$ mit $n \geq n_0$ beliebig, aber fest."
  - Induktionsannahme: „Angenommen, es gilt $P(n)$."
  - Behauptung: „Es gilt $P(n+1)$."
  - Beweis: benutze $P(n)$, um $P(n+1)$ zu zeigen.

Altes Beispiel*

<u>Satz</u>:

> *Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:* $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

<u>Beweis</u>:

I.A. Für $n = 1$: $\sum_{k=1}^{1} k = 1 = \frac{1\cdot(1+1)}{2}$. ✓

I.V. Angenommen, es gilt $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ für ein beliebiges, aber festes $n \in \mathbb{N}$.

I.S.

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \sum_{k=1}^{n} k + n + 1 \overset{\text{I.V.}}{=} \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 = \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

$\square$

*Dieses Schema wird im DS Trainer benutzt und war in den letzten Jahren zulässig.

Neues Beispiel*

Satz:

> *Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:* $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

Beweis:

- Induktionsbasis: Für $n = 1$ gilt: $\sum_{k=1}^{1} k = 1 = \frac{1 \cdot (1+1)}{2}$. ✓
- Induktionsschritt: Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig, aber fest.
  - Induktionsannahme: Angenommen, es gilt $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.
  - Behauptung: Es gilt $\sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$.
  - Beweis:

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \sum_{k=1}^{n} k + n + 1 = \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 = \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

$\square$

*Gewünschtes Schema dieses Jahr.