Pumping-Lemma für reguläre Sprachen

Lückentext/Rezept

Sei L regulär und $n \geq$ [1] eine beliebige Pumping-Lemma-Zahl für L.

Wähle z = [2] mit $z \in L$ und $|z|$ = [3] $\geq n$.

Seien $u,v,w \in \Sigma^*$ beliebig mit $z = uvw$, $v \neq \varepsilon$ und $|uv| \leq n$.

Für v gilt: [4]. Daraus folgt [5] $\notin L$, denn [6].

Widerspruch!

Erläuterungen

[1] Meistens 1, kann aber auch 2,3,4,... sein, wenn die Argumentation bei [6] nur für $n \geq 2,3,4,...$ funktioniert. Diese Lücke wird ganz am Schluss - also nach [6] - ausgefüllt.

[2] Ein Wort aus L mit Länge mindestens n. D.h. z soll von n abhängig sein.

[3] Länge von z in Abhängigkeit von n. Soll mindestens n sein!

[4] Eine Beschreibung von v. Gibt es mehrere Möglichkeiten dafür, dann werden für jeden Fall die Lücken [4]-[6] neu ausgefüllt! Wegen $v \neq \varepsilon$ und $|uv| \leq n$ hat v mindestens 1 Zeichen und höchstens n und liegt innerhalb der ersten n Positionen von z.

[5] uv^iw für ein konkretes i aus $\{0,2,3,4,5,...\}$, so dass $uv^iw \notin L$ gilt. Achtung: i=1 ergibt keinen Sinn, da $uv^1w = uvw = z \in L$.

[6] Argumentation, warum $uv^iw \notin L$ gilt.

ACHTUNG:

Ich werde in den folgenden Beispielen nur den Inhalt der Lücken [1] bis [6] angeben. Wenn ihr eine Aufgabe löst, dann schreibt bitte immer brav den gesamten Text hin!

Beispiele

1) $L = \{a^m b^m \mid m \in \mathbb{N}\}$

- [1] 1
- [2] $a^n b^n$
- [3] 2n
- [4] $v = a^k$ für $k \geq 1$.
- [5] uv^0w
- [6] uv^0w hat höchstens n-1 as, aber genau n bs, obwohl jedes Wort aus L gleich viele as wie bs hat.

auch möglich:
- [5] 2 (oder 3,4,5,...)
- [6] uv^iw hat mindestens n+1 as, aber

genau n bs, obwohl jedes Wort aus L
gleich viele as wie bs hat.

2) $L = \{aw \mid w \in \{b,c\}^* \text{ und } |w|_b = |w|_c\}$

[1] 1
[2] ab^nc^n
[3] $2n+1$

Fall 1:

[4] $v = ab^k$ für $k \geq 0$.
[5] uv^0w
[6] uv^0w hat kein a, obwohl jedes Wort aus L mit a beginnt.

auch möglich: [5] 2 (oder 3,4,5,...)
[6] uv^iw hat 2 (oder 3,4,5,...) as, obwohl jedes Wort aus L nur ein a hat.)

Fall 2:

[4] $v = b^k$ für $k \geq 1$.
[5] uv^0w
[6] uv^0w hat höchstens n-1 bs, aber genau n cs, obwohl jedes Wort aus L mit gleich viele bs wie cs hat.

auch möglich: [5] 2 (oder 3,4,5,...)
[6] uv^iw hat mindestens n+1 bs, aber genau n cs, obwohl jedes Wort aus L gleich viele bs wie cs hat.

3) $L = \{a^l b^m \mid l < m\}$

[1] 1
[2] a^nb^{n+1}
[3] $2n+1$
[4] $v = a^k$ für $k \geq 1$.
[5] uv^2w
[6] uv^2w hat mindestens n+1 as und genau n+1 bs, d.h. $|uv^2w|_a \geq |uv^2w|_b$.

4) $L = \{a^{(m^2)} \mid m \in \mathbb{N}\}$

[1] 2 (siehe [6])
[2] $a^{(n^2)}$
[3] n^2
[4] $v = a^k$ für $1 \leq k \leq n$.
[5] uv^0w
[6] es gilt

$$(n-1)^2 < n^2-n \leq |uv^0w| \leq n^2-1 < n^2,$$

denn $n^2-1 < n^2$ ist trivial und

$$(n-1)^2 < n^2-n$$
$$\Longleftrightarrow n^2-2n+1 < n^2-n$$
$$\Longleftrightarrow -2n+1 < -n$$
$$\Longleftrightarrow 1 < n.$$

(Deswegen steht bei [1] eine 2!)

Also liegt $|uv^0w|$ echt zwischen zwei benachbarten Quadratzahlen und kann somit selbst keine Quadratzahl sein.

auch möglich: [5] uv^2w
[6] Es gilt

$n^2 < n^2+1 \le |uv^2w| \le n^2+n < (n+1)^2$,

denn $n^2 < n^2+1$ ist trivial und

$n^2+n < (n+1)^2$
$\iff n^2+n < n^2+2n+1$
$\iff n < 2n+1$
$\iff -1 < n$.

(Hier ist es wieder egal, was man bei [1] schreibt. Man könnte z.B. auch 1 statt 2 schreiben. 0 ist verboten, weil 0 nie eine Pumping-Lemma-Zahl sein kann.)

Also liegt $|uv^2w|$ echt zwischen zwei benachbarten Quadratzahlen und kann somit selbst keine Quadratzahl sein.

5) $L = \{a^{(m^3)} \mid m \in \mathbb{N}\}$

[1] 2 (siehe [6])
[2] $a^{(n^3)}$
[3] n^3
[4] $v = a^k$ für $1 \le k \le n$.
[5] uv^0w
[6] Es gilt

$(n-1)^3 < n^3-n \le |uv^0w| \le n^3-1 < n^3$,

denn $n^3-1 < n^3$ ist trivial und

$(n-1)^3 < n^3-n$
$\iff n^3-3n^2+3n-1 < n^3-n$
$\iff 1 < 3n^2-4n$
$\iff 1 < n\cdot(3n-4)$.

Die letzte Ungleichung gilt für alle $n \ge 2$.

(Deswegen steht bei [1] eine 2.)

Also liegt $|uv^0w|$ echt zwischen zwei benachbarten Kubikzahlen und kann somit selbst keine Kubikzahl sein.

auch möglich: [5] uv^2w
[6] Es gilt

$n^3 < n^3+1 \le |uv^2w| \le n^3+n < (n+1)^3$,

denn $n^3 < n^3+1$ ist trivial und

$n^3+n < (n+1)^3$
$\iff n^3+n < n^3+3n^2+3n+1$
$\iff -1 < 3n^2+2n$
$\iff -1 < n\cdot(3n+2)$.

Die letzte Ungleichung gilt für alle $n \ge 0$.

(Hier ist es wieder egal, was man bei [1] schreibt. Erinnerung: 0 ist verboten, weil 0 nie eine Pumping-Lemma-Zahl sein kann.)

Also liegt $|uv^2w|$ echt zwischen zwei benachbarten Kubikzahlen und kann somit selbst keine Kubikzahl sein.

Pumping-Lemma für kontextfreie Sprachen

Lückentext/Rezept

Wie beim regulären Pumping-Lemma, aber mit:

kontextfrei	statt	regulär
$u,v,w,x,y \in \Sigma^*$	statt	$u,v,w \in \Sigma^*$,
$z = uvwxy$	statt	$z = uvw$,
$vx \neq \varepsilon$	statt	$v \neq \varepsilon$,
$\lvert vwx\rvert \leq n$	statt	$\lvert uv\rvert \leq n$ und
$uv^iwx^iy \notin L$	statt	$uv^iw \notin L$.

Erläuterungen

[1], [2], [3] und [5] wie beim regulären Pumping-Lemma.

[4] Diesmal wird vx beschrieben. Wegen $vx \neq \varepsilon$ und $|vwx| \leq n$ hat vx auch mindestens 1 Zeichen und höchstens n, kann aber beliebig innerhalb von z liegen (nicht nur am Anfang)!

[6] Diesmal wird argumentiert, warum uv^iwx^iy nicht in L ist.

Beispiele

1) $L = \{a^kb^lc^m \mid k < l < m\}$

[1] 1
[2] $a^nb^{n+1}c^{n+2}$
[3] 3n+3

Fall 1:

[4] vx enthält nur as.
[5] uv^2wx^2y
[6] uv^2wx^2y enthält mindestens n+1 as, aber genau n+1 bs.

Fall 2:

[4] vx enthält as und bs.
[5] uv^2wx^2y
[6] uv^2wx^2y enthält mindestens n+2 bs, aber genau n+2 cs.

Fall 3:

[4] vx enthält nur bs.
[5] uv^0wx^0y
[6] uv^0wx^0y enthält höchstens n bs, aber genau n as.

auch möglich: [5] uv^2wx^2y
[6] uv^2wx^2y enthält mindestens n+2 bs, aber genau n+2 cs.

Fall 4:

[4] vx enthält bs und cs.
[5] uv^0wx^0y
[6] uv^0wx^0y enthält höchstens n bs, aber genau n as.

Fall 5:

[4] vx enthält nur cs.
[5] uv^0wx^0y
[6] uv^0wx^0y enthält höchstens n+1 cs, aber genau n+1 bs.

Info: Diese Aufgabe kann man auch mit nur 3 Fällen lösen, aber mir war wichtiger, euch die intuitivere Lösung zu geben als die "elegantere". Für Interessiert:

2) $L = \{a^k b^l c^m \mid k < l < m\}$

(nochmal, aber diesmal mit nur 3 Fällen)

[1] 1
[2] $a^n b^{n+1} c^{n+2}$
[3] 3n+3

Fall 1:

[4] vx enthält mindestens ein a und wegen $|vwx| \leq n$ kein c.
[5] uv^3wx^3y (i=0 und i=2 gehen hier nicht)
[6] uv^3wx^3y enthält mindestens n+2 as, aber genau n+2 cs.

Fall 2:

[4] vx enthält kein a, aber mindestens ein b.
[5] uv^0wx^0y
[6] uv^0wx^0y enthält höchstens n bs, aber genau n as.

Fall 3:

[4] vx enthält nur cs.
[5] uv^0wx^0y
[6] uv^0wx^0y enthält höchstens n+1 cs, aber genau n+1 bs.